DELLE OPERE MATEMATICHE DI PAOLO-MATTIA DORIA

TOMO PRIMO

Nel quale si contengono la Duplicazione del Cubo, ed altre Opere a cagione di quella dall' Autore fatte, e in varij tempi pubblicate, e in quest' ultima edizione di nuove considerazioni ornate.

Con l' aggiunta nel fine d' una Lettera, colla quale si risponde a due articoli, che si leggono nel Libro intitolato

Actorum eruditorum, quæ Lipsiæ pubblicantur, supplementa, Tomus VII.

IN VENEZIA MDCCXXII.

LETTERA AL LETTORE

Uantunque molti siano forse frà matematici quelli, i quali non si siano dati briga di esaminar la quistione, che frà me, e molti signori letterati uomini si aggita à cagione della Duplicazione del Cubo da me la seconda volta pubblicata in Anversa l' anno MDCCXV. per Cristofaro Plantini; non v' è però, a mio credere, chi ignori le veementi dispute, che intorno a quella mi è convenuto sostenere, e contro alcuni signori matematici, e contro la celebre, e dottissima Università di Lipsia; onde stimo dover tralasciare com troppo nota la narrazione di quest' istoria: ma perche per l' accennata contesa molte, e molte sono state le scritture, che in varij tempi hò creduto dover pubblicare, à fine di rispondere a i miei Avversarij; ed altresì à fine d' ischiarir sempre, e sempre più le mie dimostrazioni. Seguendo ancor io quel naturale desio, che l' amor proprio spira nel cuore degl' uomini tutti, cioè di curare, per quanto à noi è possibile, che col tempo non si disperdano le proprie opere; hò pensato onesta cosa fare tutte unite pubblicarle: hò dunque tutte le Opere da me fatte à cagione della Duplicazione del Cubo in questo presente libro raccolte. Ma perche quando taluno risolve di pubblicar l' ultima volta le proprie opere, sempre s' affatica di ridurle in miglior ordine, e di accrescerle di nuove considerazioni per modo, che sempre, e sempre più ischiarite ne divengano; perciò mi son io ingegnato in questa nuova, ed ultima pubblicazione della mia Invenzione, di molte nuove considerazioni arricchirla; per la qual cosa narrerò ora in breve quelle mutazioni, e quelle aggiunzioni, che in diversi luoghi di essa si vedranno fatte.

Nel principio si legge una Dissertazione contro la geometria di Renato Des-Cartes da me pubblicata l'anno 1721. In questa il Lettore potrà conoscere, che io hò fatto dopò quel che doveva fare assai prima di pubblicare la mia Duplicazione

del cubo: E in vero necessaria cosa era, che prima di urtare con una nuova invenzione le curve già ricevute per linee geometriche da signori geometri, io uscissi in campo nella figura di oppositore della geometria di Renato, e de' suoi seguaci; imperciocchè in questa guisa avrei fatto, come usano fare quegl' accorti architetti, i quali prima gittono a terra le male inalzate moli, poscia ergono quelle, ch' essi stessi hanno con buon ordine di discorso pensate: E in vero se così avessi io fatto, forse non avrebbero i signori moderni matematici ricevuta con tanto orrore la mia Duplicazione del cubo, quanto è quello, col quale l' hanno ricevuta da prima; imperocchè chiariti essi degl' errori, che nella geometria di Renato si contengono, o posti intorno a ciò almeno in dubbio; non avrebbero poi ricusato di studiare la mia Invenzione, nella quale con geometrica dimostrazione si ritrova quello, che i geometri antichi han sempre desiderato, che si trovasse. Questo dunque, che hò detto, è la cagione, per la quale io hò posto nel principio di questo Libro l' accennata Dissertazione, perchè mia intenzione si è, che prima di passare allo studio delle mie proposizioni geometriche, il Lettore vegga in quella gl' errori, che nella moderna geometria de i signori renatisti chiaramente si scoprono.

Siegue poi la Raccolta di tutte le mie dimostrazioni, che in diverse scritture, e in diverse Lettere, da me in diversi tempi pubblicate, hò fatte a fine di provare, che la parabola Apolloniana non hà le proprietà, che se l' assegnano; ed hò in varij, e diversi luoghi di quella ampliate, e in qualche parte ancora mutate alcune dimostrazioni à fine d' evitar le repliche, e le oscurità: e quantunque io abbia ben conosciuto, che non sarebbeno mancati di quelli, i quali avrebbero detto, che 'l moltiplicar le dimostrazioni in geometria è difetto a cagione, che se la cosa è in se vera, basta una, e se non è vera le molte non servono: Con tutto ciò hò voluto di molte, e molte dimostrazioni arricchire la mia Invenzione, e ciò a cagione, che io hò pensato, che nelle cose nuove, e in particolare nelle mie, nelle quali poco men, che tutte le menti de' signori matematici si ritrovano del contrario prevenute; era necessario, che io m'

inge-

ingegnassi di fare in guisa, che considerandosi la medesima cosa in più, e più modi, i matematici formassero un abito di mente a considerar le verità, ch' io dimostro. Nell' accennata Raccolta poi io hò narrate alcune opposizioni, che certi andavano buccinando; ed oltre a ciò ne hò fatto a me medesimo delle altre, che forse i miei oppositori non aurebbero pensate, e tutte le hò felicemente risolute: In quelle opposizioni io spiego delle proprietà, a mio credere, non ancora da altri considerate intorno alla natura della quantità discreta, e della continua; e insegno coll' esempio il modo, col quale si devono in geometria fare le distinzioni frà la quantità della medesima, ovver di diversa specie. Vero è bensì, che per il calcolo, che si legge da me fatto dalla pag. 16. fin a' 28. non mancheranno di quelli, i quali mi accuseranno di troppo prolisso, e stancante; ma a questo io rispondo, come hò risposto poc' anzi, che nelle cose nuove si dee anteporre l'esattezza nel dimostrare al vano timore di annojare il Lettore: Con tutto ciò però, se alcuno non si sentisse la forza di considerare quel lungo calcolo, può leggere quell altro, che io hò fatto dalla pag. 44. fin a 46. della Risposta da mè fatta a i due articoli de i Signori Autori degl' atti di Lipsia, perche in quello calcolo vedrà più brevemente dimostrato lo stesso, che hò dimostrato in quello dell' antecedente Raccolta, cioè; che quelle differenze, le quali da altri si suppongono essere frà le parallele, che terminano alle linee rette da me assegnate per radici, e le applicate, che terminano alla parabola Apolloniana, svaniscono in tutto, quando gli quadrati, e le radici si considerano come infinite. In questa guisa mi sembra, che le dimostrazioni, che si contengono nell' accennata Raccolta, siano sufficienti à convincere qualunque geometra, che intenda la forza di una dimostrazione sintetica: con tutto ciò per farmi in tutto incontro alla prevenzione di mente, che incontra questa mia novella Invenzione; io nel quarto Dialogo, che per le ragioni, che narrerò in appresso, hò aggiunto a quelli, che pubblicai l' anno 1718., fò sì, che il mio Interlocutore Filotimo, à fine di formare un giudizio di tutta la mia Invenzione, alcune sue difficoltà mi proponga, e queste potrà leggere dalla pag. 321. fino a 359. del quarto Dialogo chiunque,

que,

que, come non ben sicuro del metodo sintetico, non si sentisse ancora ischiarito di mente intorno alle verità, che nella mia Invenzione si contengono. Questo è quanto mi è paruto avvertire al Lettore intorno alla Raccolta da me pubblicata l' anno 1721.

Si passa poi alla Duplicazione del Cubo, nella quale uso per la medesima accennata ragione l' istessa moltiplicità di dimostrazioni, che hò usato nella riferita Raccolta: Indi hò fatto imprimere esattamente tutte le opposizioni, che da alcuni sig. matematici mi sono state fatte, e da me pubblicate nella ristampa del nuovo Metodo, ò sia Duplicazione del cubo, pubblicata l' anno MDCCXV. in Anversa; e le seconde opposizioni da medesimi Signori fatte, e in varie lettere pubblicate, e à tutte le accennate opposizioni si leggono le mie risposte, colle quali non solo soddisfaccio ampiamente à i loro motivi, ma da ogn'una delle mie risposte si ricava una nuova dimostrazione del mio assunto. Dopò di ciò si legge la Lettera, che io indirizzai al dottissimo, e gentilissimo Sig. D. Paolo Francone Marchese di Salcito, nella quale si contengono le mie considerazioni intorno alle parabole di grado superiore; e in questa mi sono ingegnato di torre via quella moltiplicità di proposizioni, che nella prima impressione aveva io usato; e ciò hò fatto a cagione, che la più gran parte di quelle dimostrazioni si leggono ora nella Duplicazione del cubo; ed oltre a ciò, perche chiunque resterà persuaso delle dimostrazioni contenute nella Raccolta, non durerà molta fatica à persuadersi, che se le radici terminano alle linee rette da me ritrovate, i quadrati, i cubi, e tutte le altre potenze devono anche terminare ad altre linee rette. A' tutte le da me riferite Opere sieguono i Dialoghi da me fatti à cagione della poco prudente relazione, che l' Accademia di Lipsia fece del mio Nuovo Metodo l'anno 1717. e da me pubblicati l' anno 1718. Narrerò ora in breve prima, qual sia stata la cagione, che à componere quei Dialoghi mi mosse, e poscia le aggiunzioni, e le mutazioni, che in quelli hò creduto dover fare in questa seconda impressione.

Egli non v' è, à mio credere, altra cosa più possente à muovere gl' uomini ad intraprendere le difficili opere, che un fervente desio di conseguire un qualche bramato fine, avver
la

la necessità di liberarsi da qualche penoso travaglio: ed al-certo travaglio somigliante a quello, nel quale mi sono io veduto inciampato, allora quando nell'anno 1715. pubblicai il mio Nuovo Metodo, non credo, che possa nell' istoria della litteraria repubblica ritrovasi. E che ciò sia vero, un consenso generale di tutt' i matematici non solo escludeva la mia Novella Invenzione, ma sdegnava ancora esaminarla, e quel ch' è più, i miei più intimi amici non solo non osarono intraprenderne la difesa, ma crederono onesta, ed utile cosa fare, essi stessi i primi detestarla: per la qual cosa io mi vidi tutto ad un tempo esposto sì fattamente al biasimo, e per così dire, al deriso de i non intesi di geometria, che se quel poco di credito, che mi aveva acquistato à cagione delle altre mie Opere, e l'espressa approvazione, che di questa Duplicazione del cubo, fece il Sign. Monforte, non avessero in qualche modo posto in dubbio le menti de i non intesi di geometria, io mi sarei visto esposto ad esser trattato da cervello chimerico, e stravagante. Ora dunque per le accennate cagioni fummi necessario affinar l' intelletto per cercar di penetrare nelle intime cagioni, ch' eran possenti à produrre un così ingiusto disprezzo, che da signori matematici mi si faceva di un' Opera à salde dimostrazioni geometriche in tutto appoggiata, qual era la mia; e vidi chiaramente, che tutto ciò avveniva dall' essermi io colla mia Invenzione opposto benche indirettamente alla geometria di Renato Des-Cartes, la quale non in altro, che nelle linee curve, e nell' algebra è tutta fondata; e in consequenza di ciò conobbi con evidenza di ragioni, che la prevenzione di mente, e la passione dell' amor proprio ingenerata nel cuore de i signori matematici seguaci della moderna geometria, eran quelle, che producevano in alcuni il disprezzo, in altri il livore verso la mia invenzione.

In consequenza dunque delle accennate cagioni mi studiai, per quanto mi fù possibile, di oppormi alla prevenzione di mente, à fine di potermi far' incontro à quella invidia di alcuni, ch' era dall' amor proprio, siccome hovvi detto, prodotta; e per conseguire il mio onesto fine, m' ingegnai ne i miei Dialoghi di far conoscere, che tutte quelle grandi

inven-

inventioni, colle quale i signori moderni si lusingano di aver fatto, come si suol dire, la scuola agli antichi geometri, eran vane, ed insussistenti; e che 'l più vero metodo per disciplinar la mente umana nell' esercizio del retto discorso, e per inventar cose à vere, e salde dimostrazioni appoggiate, era quello, che ci hà lasciato Euclide. Feci dunque in questi miei Dialoghi un comento ad Euclide, tutto, à mio credere, dalla buona metafisica dedotto; e in questa occasione feci conoscer chiaramente quanto alla perfezione, ed all ingrandimento dell' umano discorso sia pernicioso l' uso de i calcoli analitici da signori moderni fino all' eccesso seguiti: E in vero hanno i signori moderni inalzato à tal segno l' uso de i calcoli da essi usati nell' algebra speciosa, e ne i loro nuovi metodi, che si sono ingegnati à tutto loro potere di far sì, che i giovani loro discepoli mirino la geometria sintetica, non come una scienza buona in se medesima, ma come una scienza, che sol tanto si dee studiare, quanto che la notizia di quella è necessaria per lo studio dell' algebra speciosa, e de i nuovi metodi; ed à cagion d'esempio. A' nostri giorni quando da alcuni sig. algebristi si vuol esprimere l' imagine di un matematico da tenersi in poco conto, si dice per comune adaggio; egli non intende altro, che la geometria vulgare, ciò che vale a dire, la geometria degli antichi, tanto è il disprezzo, che di quella fanno alcuni: E pur è vero, che questa sì fatta geometria vulgare è quella sola, che disciplina la mente umana nel buon raziocinio; e quella sola, che forma il perfetto geometra, ed è quella medesima, che non intendono quei matematici, i quali avendo presa la notizia degl' elementi solamente per semplice erudizione, si sono, à fine di sciogliere le quistioni, immersi nell' uso de i calcoli. In questi Dialoghi poi, à fine di porger rimedio ad un così pernicioso abuso, com' è quello, che hò poc' anzi narrato, hò insegnato al mio Interlocutore l' arte di esaminare una proposizione per la via sintetica dimostrata, ed il modo, col quale si dee la geometria sintetica studiare: Oltre à ciò le hò appalesato il modo, come dallo studio della geometria si fà passaggio à quello importantissimo della filosofia, e delle altre scienze; e quel ch' è più le hò additato quali debbon esere

sere

sere quelle virtù, che indispensabilmente dee seguire chiunque intraprende di penetrare ne i misterj della sapienza. Alla perfine l' hò dimostrato il modo, come nella geometria si disciplina la mente per lo studio delle scienze, e si rende l' animo moriggerato nel buon costume; e tutto ciò hò fatto, à fine di togliere, per quanto mi sia possibile, dagli uomini quei difetti, che, à mio gran costo, hò sperimentato regnare nella mente di alcuni.

Negl' accennati Dialoghi poi non mi sono dato briga d' impugnare à dirittura i metodi da' signori moderni inventati, come son quello de' differenziali, ed integrali, quello degl' infinitamente piccioli, ed altri; perche avendo io formata un' idea generale, hò conosciuto, che niente hanno che fare coll' assunto, che io hò preso, cioè di ridurre alla sua antica, e rigorosa purità la geometria; e parmi in ciò aver ben fatto: imperciocche se i sign. moderni inventori di quei metodi altra cosa non pretendono, per lo mezzo de' loro calcoli, se non che ritrovar curve meccaniche, e di solver problemi appartenenti alla fisica, io non hò niente che fare con essi; e siccome hò detto ne' Dialoghi da me pubblicati l' anno 1718. li reputo ingegnosissimi, ed utili per la fisica, nella quale l' esattezza geometrica non si ricerca. Vero è bensì, ch' io porto fermissima opinione, che questi sì fatti metodi, li quali traggono tutta la lor origine dal metodo degl' Indivisibili di Bonaventura Cavalerio, guastino, e corrompino quell' ingegnosissimo metodo, in quella guisa appunto, che l' algebra speciosa hà guastata la geometria d' Euclide; e che sia così.

Li signori moderni geometri non han fatto altro negl' accennati lor nuovi metodi, che ingegnarsi di esprimere co' i loro calcoli quello, che Cavalerio ci hà insegnato per la via delle dimostrazioni astratte, e metafisiche, e con ciò han fatto lo stesso, che Renato, procurando di risolvere per mezzo di calcoli quei problemi, ch' Euclide c' insegna di risolvere per lo mezzo de' suoi elementi provati con dimostrazioni astratte, e pure; ond' è, che gl' accennati metodi li deviano dall' utilissimo studio della geometria di Cavalerio, e li rendono incapaci d' intendere le dimostrazioni sintetiche fatte per la via degl' infiniti, in quella guisa appunto, che il

calcolo analitico li rende incapaci d' intendere le dimostrazioni sintetiche fatte per la via d' Euclide.

Oltre che io penso certamente, che se da' signori moderni si praticasse quello stesso metodo, che hò praticato io per ritrovare i punti estremi di quelle linee, che formano il perimetro della parabola Apolloniana, ritroverebbero ancor essi senza l' uso de i loro calcoli le vere linee, delle quali, siccom' essi confessano, si compongono i perimetri di quelle curve meccaniche, ch' essi ritrovano per la via de i loro calcoli. Alla perfine quello stesso metodo degl' Indivisibili di Cavalerio, ch' è il fonte, dal quale scaturiscono tutte le loro invenzioni, giunto agl' elementi d' Euclide, ed all' aritmetica, gli apprestarebbe forse il modo di descrivere geometricamente quelle linee curve, delle quali essi ora non conoscono i termini per descrivere le linee rette, che compongono il perimetro di quelle: con tutto ciò però, siccome hò detto poc' anzi, io non impugno questi nuovi metodi, quando abbino per oggetto le cose fisiche, e meccaniche; tanto più che troppo dura impresa mi sarebbe stata impugnarli in particolare, non essendomi curato di esaminarli, dopo che li hò conosciuti non solo inutili, ma perniciosi alla purità della geometria, appunto come hò ingenuamente confessato nella risposta, che hò fatto alle opposizioni de' Signori Autori degl' atti di Lipsia. Passiam' ora alla narrazione di quelle mutazioni, e aggiunzioni, che negl' accennati Dialoghi hò fatte.

Per primo avendo io considerato, che non era più sufficiente cosa il solo fare esaminare à Filotimo il mio nuovo Metodo, ma che all' incontro vopo era, ch' egli esaminasse tutta la mia Invenzione, e dasse un giudicio di tutte le mie Opere, che intorno à questa materia hò fatte dall' anno 1718. sino ad oggi: Quindi è, che per evitar l' anacorismo, mi è stato necessario fingere, che da quel tempo dell' anno 1718. ch' io ragionai con Filotimo intorno all' accennata relazione de i Signori Autori degl' atti di Lipsia, egli si fusse da me dipartito, e andato ad abitare in altra città, dove io gli abbia sempre inviate tutte le scritture, che di mano in mano sono andato producendo. In consequenza dunque di questo fatto, che fingo, non fò più, come feci nel Dialogo

ter-

terzo dell' anno 1718., esaminare à Filotimo il mio nuovo Metodo, ma fò sì, ch' egli esamini meco da parte à parte tutto quello, che sù di tal materia hò scritto. Questa è stata dunque la cagione, per la quale io hò aggiunto a i trè miei Dialoghi il quarto, nel quale, dopo aver io ne i tre primi ragionato, come in quelli dell' anno 1718. intorno all' intima natura, ed alla vera essenza del vero, che si deduce dalla geometria sintetica, e intorno al modo, col quale nella geometria d' Euclide la mente umana si disciplina nel raziocinio; potrà il Lettore vedere vivamente espresse nella renitenza, che mostra il mio interlocutore Filotimo à non volere, quantunque convinto, approvare le mie proposizioni, la poco libertà d' animo, e quella incertezza di raziocinio, che l' animo servile, e la insofficienza di mente sogliono produrre nelle anime deboli: ma poscia fò sì, ch' esso stesso ammaestrato da miei insegnamenti intorno all' obbligo indispensabile, che hanno gl' uomini di lettere di confessar sempre con costanza d' animo la verità, siccome ancora i proprij errori; si vedrà Filotimo vergognoso della sua passata viltà, ardere di zelo, e di desio di andare a ritrovare uno di quei maestri, che si sono ingegnati di celare agl' occhi de' meno accorti il pregio della mia Opera, e convincerlo intorno alla verità delle mie proposizioni. In questa occasione si vedranno al vivo espresse tutte le maliziose arti, che un malizioso maestro può adoperare con suoi discepoli, ò con altri semplici uomini à fine di screditare la mia Invenzione, ed alienarli dal desiderio di studiare le mie proposizioni. Nella conclusione poi di questo Dialogo io insegno à Filotimo una petizione, ch' egli deve fare all' accennato fastoso maestro, e in quella fò sì, ch' egli lo convinca solamente per lo mezzo delle definizioni, e degli postolati d' Euclide dell' errore, che han preso prima Renato, e poi i signori moderni matematici di lui seguaci, quando han creduto, che le curve d' Apollonio, le quali non si possono descrivere, abbino le proprietà, ch' Apollonio le assegna. Per secondo i trè primi Dialoghi, ne i quali si contiene tutto ciò, che io avea detto in quelli del 1718., hò voluto di nuove riflessioni arricchirli. E per terzo, ed ultimo mi sono ingegnato di scriverli in uno stile alquan-

quanto più colto, e puro di quello, col quale li scrissi l' anno 1718., nel qual tempo io fui impedito di scriverli esattamente dall' ardente volontà, che aveva di far presto conoscere alla dottissima Università di Lipsia, che non avevano offeso un uomo capace di lasciarsi opprimere dalla moltitudine per modo, che non sapesse sostenere con coraggio la causa della verità à fronte dell' autorità, e del numero de' contradittori. Questo è in breve quello, che si contiene in questo Libro.

Io poi non voglio quì dilungarmi in una lunga narrazione di tutti gl' avvantaggi, che alli studiosi di Matematica puole arrecare il leggere questo mio Libro: Dirò solamente, che oltre lo imparare una invenzione, la quale discopre un problema tanto nuovo, e in tutti i tempi tanto desiderato, quanto è quello della Duplicazione del cubo; i signori matematici possono da i miei Dialoghi vedere i danni, che riceve la mente umana dall' uso de i calcoli analitici inventati da i seguaci dell' algebra speciosa, e come si debba disciplinar la mente nella Geometria, in guisa tale, ch' ella si renda ugualmente abile à salire allo studio della Filosofia, che delle altre scienze tutte. Quello però, che più di ogn' altra cosa mi preme di avvertire il Lettore, si è, che se negl' accennati miei Dialoghi egli vedrà dipinti con vivi colori le imagini di alcuni matematici men che sinceri nel ragionare co' i giovani studiosi, o con altri non intesi di geometria della mia Invenzione; mia intenzione non è mai stata di offendere tutto il ceto da me riverito de signori matematici, ma solamente quei, ch' hanno adoprate le malizziose arti, che io hò narrate al mio Interlocutore Filotimo; e ciò han fatto à fine di togliermi quel poco di gloria, che in virtù delle mie oneste, e libere fatiche mi son procacciato: E in vero spero, che niuno onesto uomo possa biasimarmi à cagione del ritratto, che di sì fatti matematici hò fatto. Imperciocchè ò questi asseriscono, che le mie Invenzioni non sono à salde dimostrazioni appoggiate, e devono far conoscere, che la mia mente adombrata dall' amore dell' Invenzione mi abbia precipitato nel grand' errore di tacciar uomini onesti, solamente perchè non han voluto approvare le mie Invenzioni; ciò che loro

sarà

sarà certamente impossibile à fare ; ovver negano di avere praticate le poco sincere arti , che io hò narrate ; e in questo caso io non sono di biasimo degno , imperciocchè è stato sempre lecito nella Comedia , ò nel Dialogo , ch' è lo stesso , porre in sù la scena qualsivoglia possibile carattere d' uomo , per prevenir gl' uditori , contro un qualche perniciofo genere di persone ; per la qual cosa io non hò offeso veruno : Ovver continuano à sostenere il da loro mal preso inpegno ; ed io son degno di scusa se mi affatico di scoprir le loro male arti ; perche defensio est de jure naturæ ; *e ad un uomo gentilmente educato , e di animo libero , è viltà d' animo il lasciarsi opprimere dalla calunnia. Gradisci intanto ò Lettore questa mia Opera, che poi nel secondo Tomo, à Dio piacendo, daremo al publico le nostre Esercitazioni geometriche, da noi già in varie scritture pubblicate , e nelle quali abbiamo sciolti i problemi da noi in varij tempi proposti . La nostra Meccanica stampata in Augusta l'anno 1711. , ed oltr' a ciò le nostre considerazioni stampate in Roma l anno 1621. , fatte al libro il di cui titolo è:* della Dottrina de Triangoli, Trattato di Giacinto de Cristofaro Giurisconsulto Napoletano in Venezia l'anno 1720. ; *e tutte queste Opere in miglior forma ridotte ; e forse con l'aggiunta ancora di qualche altra operetta intorno all' arte nautica , all' astronomia , e intorno all' arte della guerra . Vivi felice.*

TA-

TAVOLA
DE' TRATTATI.

Dissertazione intorno alla nuova geometria di Cartesio.

Raccolta di tutte le Dimostrazioni, e Considerazioni dell' Autore a fine di provare, che la parabola Apolloniana non hà le proprietà, che da' geometri se l' assegnano. pag. 1

Duplicazione del cubo. pag. 55

Obbiezioni fatte alla Duplicazione del cubo con le risposte dell' Autore. pag. 81

Lettera del Signor Antonio Monforte all' Autore. pag. 97

Osservazioni sù d' una Lettera dal Signor Antonio Monforte scritta al Signor D. Paolo-Mattia Doria. pag. 103

Risposta di Paolo Bonelli alla sud. lettera. pag. 123

Dimostrazione del luogo, ove terminano le linee cubiche ricercate nel libro intitolato: Nuovo Metodo geometrico &c. pag. 141

Risposta dell' Autore all' antecedente scrittura. pag. 149

Lettera dell' Autore al Sig. Marchese di Salcito intorno alle parabole di grado superiore. pag. 167

Dialoghi dell' Autore, ne' quali rispondendosi ad un articolo de i Signori Autori degl' atti di Lipsia dell' anno 1717.*, s' insegna l' arte di esaminare una dimostrazione geometrica, e di dedurre dalla Geometria sentenza la conoscenza del vero, e del falso: e in conseguenza di ciò si esaminano l' Algebra, e i nuovi metodi de i moderni.* 185

Re-

Relazione delli Signori Autori degl' atti di Lipsia. pag. 187
Dialogo primo. pag. 193
Dialogo secondo. pag. 221
Dialogo terzo. pag. 293
Dialogo quarto. pag. 313
Lettera dell' Autore, nella quale si risponde a due articoli, che si leggono nel libro intitolato: Actorum Eruditorum, quæ Lipsiæ pubblicantur, supplementa Tomus VII.

RR

ERRORI

Scorsi in questo Libro.

pag. vers.	Errori	Correzione.
	Nella Dissertazione.	
pag. 6. *vers.* 22.	Leibenitz	Leibnizio, ed altrove ancora
pag. 7. *vers.* 33.	pervenuti	prevenuti
pag. 11. *vers.* 11.	gl' nntichi riputorono	gl' antichi non riputorono
pag. 23. *vers.* 30.	gli sembra	le sembra
pag. 37. *vers.* 17.	d' Upin	Du Pin
	Nella Raccolta.	
pag. 5. *vers.* 18.	dell'asse	dell'ascissa dell' asse
pag. 7. *vers.* 24.	le radici infinite	le parallele infinite
pag. 7. *vers.* 27.	radici dell'asse	radici delle ascisse dell' asse
pag. 36. *vers.* 27.	le medesime proprietà	altre proprietà
pag. 50. *vers.* 4.	della conoide, della cissoide	della concoide della cicloide
pag. 159. *vers.* 31.	della retta LF	della retta LI
pag. 171. *vers.* 23.	parallelepipedo fatto dalla quarta	Parallelepipedo fatto dal prodotto della quarta
pag. 240. *vers.* 18.	materie divese	materie diverse
pag. 271. *vers.* 28.	calcuno	calculo
	Nella risposta alli Sig. di Lipsia.	
pag. 4. *vers.* 17.	Santo Evangelio	Sante Scritture, ed altrove ancora.
pag. 17. *vers.* 37.	orrori	errori
pag. 19. *vers.* 25.	abbiezioni	obbiezioni

DIS-

DISSERTAZIONE

INTORNO

ALLA NUOVA GEOMETRIA

DI

CARTESIO

Nella quale s' accennano i danni, ch' ella hà prodotto nello ſtudio della Geometria; ed in conſeguenza di ciò, ancora in quello della Filoſofia, e della Morale.

DISSERTAZIONE

INTORNO

ALLA NUOVA GEOMETRIA DI CARTESIO.

Uando mi volgo con la mente a considerar la cagione, per la quale la mia novella Invenzione da me pubblicata la prima volta l' anno 1714., *e tutta a geometrica dimostrazione appoggiata, non sia stata ancora per vera da verun geometra, fuorche dal celebre Sig. D. Antonio Monforte, confessata; non sò in vero, a che debba di sì fatta ripugnanza de' signori geometri attribuir la cagione: Imperciocche, se io voglio ricorrere alla generale cagione, cioè della poca fortuna, che sempre incontrano, ed hanno incontrato le novelle Invenzioni; sembrami far troppo gran torto alla sapienza del nostro secolo; perche l' evidenza, che nelle dimostrazioni geometriche si contiene, ha forza di condurre la mente a conoscere il vero, almeno in progresso di tempo; donde ne avviene, che il fumo delle passioni non sia bastante ad adombrare una mente, che sia sufficiente in Geometria, per modo che non conosca una verità dimostrata. E che ciò sia vero, si sà, che frà gli scienziati uomini sempre si è sù di tutte le materie disputato, ma non si legge, che sia ancor accaduta fra geometri una lunga disputa in materia di pura Geometria; perche, se per avventura è avvenuto, che un geometra si sia all' altro opposto, in virtù della risposta, o l' oppositore si è dichiarato soddisfatto, o l' inventore convinto. Mi è dunque d' vuopo, dico fra me stesso, ricorrere a qualch' altro principio diverso dal generale destino degl' Inventori, acciò possa indagar la cagione di quella universal ripugnanza, che i signori moderni matematici mostrano nell' approvare la mia novella Invenzione; e ciò dicendo, vedo, ch' egli è necessario, ch' io di qualch' altra colpa sia reo, la quale più, che le novelle invenzioni, offenda l' animo della gran parte de'*

signori moderni matematici; e sù di ciò pensando conosco, che più, che la figura d' Inventore, nella quale son comparso nella letteraria Repubblica, offende il lor animo l' idea, con la quale mi mirano d' uno Innovatore, che intraprende di distruggere la loro novella Geometria: ed invero evvi molta differenza fra gl' Inventori di nove cose, e quell' Innovatori, che pretendono distrugere quei metodi già dall' universale consentimento di tutti per veri ricevuti; perche i primi muovono bensì la passione dell' invidia, a cagion di quello, che nostra mente poteva ritrovare, e che conosce non essere stata sufficiente a ritrovare; ma i secondi ci privano di quella sapienza, che stimavamo già nostra, e ci rimproverano i nostri errori. In conseguenza dunque di queste considerazioni, sembrami di aver discoperta la cagione del silenzio, che i signori moderni geometri Cartesiani ostentano di fare, a riguardo della mia novella Invenzione: perche in vero io hò mosso guerra a quelle curve d' Apollonio, che poco men, che tutti i signori moderni geometri persuasi (e mi perdonino pur essi) da alcune poche apparenti, ed estrinseche ragioni da Renato des-Cartes addotte, han ricevute per linee geometriche al pari del cerchio; e non solo le banno per linee geometriche ricevute, ma sù di quelle han fabricato numero quasi infinito di novelle invenzioni, tutte al scoprimento di nuove curve indirizzate, per modo tale, che in tutt' i loro libri han ragionato con termini, se non di positivo disprezzo, almeno di compassione verso gl' antichi geometri, i quali avendo avuto notizia delle curve d' Apollonio, non si sono avvisati di proseguire, e d' ampliare una, a lor dire, così ingegnosa, così ferace, e così utile dottrina, come è quella delle curve. Oltre a ciò, io mi sono fortemente opposto all' Algebra speciosa, che Renato hà sì fattamente vantato, e per la quale ave ottenuto di far sì, che la maggior parte de' signori moderni geometri, obbliando il metodo sintetico, si siano in tutto applicati a i calcoli analitici; e mi sono altresì opposto a tutti i nuovi metodi da moderni inventati, ed a nuovi calcoli appoggiati: In somma opponendomi io alla dottrina delle curve, a i calcoli analitici, ed a i nuovi metodi da moderni inventati, hò intrapreso di far crollare le fondamenta, sù delle quali la più gran parte de' signori moder-

derni matematici han fabricato la mole della lor gloria; e tutto ad un tempo mi son fatto incontro alla licenza, che hanno introdotto nella Geometria, corrompendo la purità della construzione, e della dimostrazione geometrica.

Ora sù di queste considerazioni sembra, che 'l mio animo incominci ad acquietarsi al silenzio, che i signori geometri usano, a riguardo della mia novella Invenzione; perche, alla perfine, per quel che s' attiene a' seguaci della nuova geometria di Renato, ed agl' Inventori di nuovi metodi di calcolare, e di nuove curve, sembra, che io abbia meritato il titolo d' Innovatore: ma dall' altra parte, se considero quello, che hò fatto nella mia novella Invenzione, mi pare, che almeno quelli, i quali non sono autori, ne maestri nella nuova geometria de' moderni, non mi dovrebbero riguardare coll' odioso titolo d'Innovatore, ma anzi mirarmi come un Ristauratore del metodo geometrico degl' antichi: Imperciocche la mia Duplicazione del Cubo è tutta ad Euclide, e ad Archimede appoggiata; e benche m' avvaglia in qualche dimostrazione del metodo degl' Indivisibili di Bonaventura Cavalerio; in quel metodo però non vi è licenza, che ad Euclide ripugni, ciò che non si esperimenta nella nuova geometria de' moderni: Oltracciò io sono il difensore del metodo di Euclide, da molti de' signori moderni insultato; ed in pruova di ciò legganſi i miei Dialoghi stampati in Amsterdam l' anno 1718. e si vedrà, che io difendo con sode ragioni il metodo di Euclide da i moderni insultato; mostro quanto sia conforme alla naturale ragione, e quanto valevole a formare una mente abile a distinguere nelle cose tutte il vero dal falso, ed a formarla esatta, ed industriosa tutta ad un tempo, ond' è, che io sono il difensore della Geometria degli antichi; per la qual cosa egli è a gran torto, che mi si attribuisca il titolo d' Innovatore.

Da tutte queste considerazioni persuaso, sembrami, che a me avvenga quello, che è avvenuto a tutti coloro, i quali si son' fatti 'ncontro agl' abusi radicati; e sembrami, che avvenga alla mia novella Invenzione, co i signori moderni seguaci della nuova geometria quello, che avvenne all' Imperadore Elio pertinace con i soldati romani, quando alla quasi perduta di-

sci-

sciplina dell' Esercito si fece incontro; perche siccome quelli punirono ingiustamente colla morte la forte, ed onorata impresa di quello Imperadore; così i signori moderni matematici Cartesiani, la mia vera Invenzione all' oblivione condennandola, pensano intutto estinguerla. Ma alcerto io mi fò rosso, e mi vergogno d' assimigliare a' licenziosi soldati, i morigerati uomini di lettere: Imperciocche la disciplina di questi ultimi in altro non consistendo, che nella libertà dell' animo, e nella sincerità de' costumi; non si può senza grave colpa tacciarli del difetto di men che franchi, e sinceri; laonde io voglio in tutti i modi torre dalla mia mente una sì svantagiosa idea all' onore della letteraria Repubblica. Con tutto ciò però non può negarsi, che, a cagion della mia novella Invenzione, io non sia stato da signori moderni geometri più tosto come pernicioso Innovatore, che come giusto Ristauratore della buona disciplina, e come semplice Inventore estimato.

In pruova di ciò imaginiamo, che in questa mia Invenzione della Duplicazione del Cubo, siccome io hò avuto a far con moderni, avessi avuto a far cogl' antichi geometri, alcerto quei grandi uomini non avrebbero avuto a male esaminare le mie proposizioni, nè avrebbero scritto, come scrisse il Signor Leibenitz in una sua lettera: Miror, quod de his quæstio instituta fuerit. *Alla perfine gl' antichi geometri, come quelli, che non s' erano, come i moderni, impegnati a sostenere, che le curve d' Apollonio meccanicamente construite avessero esatte, e costanti proprietà; mi avrebbero riguardato bensì come Inventore di nuova, ed importantissima cosa, ma non già come Innovatore, che li riprendeva d' errore; ond' è, che mirato io da quei antichi geometri con idea d' Inventore di nuova cosa, e da tutti desiderata, altra difficultà non avrei avuto a superare con quelli, se non la naturale prevenzione, che genera nella mente degl' uomini, la grandezza, e la difficultà del Problema, da me risoluto; ma questa difficultà, si sarebbe agevolmente superata: Imperciocche quantunque gl' antichi geometri avessero sul bel principio creduto, di non dover, leggendo, ritrovare esattamente dimostrate le mie proposizioni, come elle sono, avrebbero*

bero almeno creduto, che io avessi, per lo scoprimento di un tal Problema, ingegnosi mezzi adoprati; ed in conseguenza di ciò, sapendo essi, che, In magnis voluisse sat est, *avrebbero voluto studiare la mia Invenzione, per vedere, siccome hò detto, se a qualche ingegnoso modo io mi fossi appigliato per condurre a fine la mia impresa: Così dunque quei grand' uomini non avrebbero mai creduto d' impiegare inutilmente il tempo, la mia Invenzione studiando.*

Oltre a ciò gl' antichi geometri, i quali non credevano, che le curve avessero proprietà geometriche, non pensavano altresì, che 'l Problema della Duplicazione del Cubo non si potesse solvere per altra via, che per quella dell' interfezione delle curve; e credendo di non poter limitare con la lor mente gl' infiniti particolari, che per la soluzion di un problema particolare si possono da geometri pensare, non biasimavano alla cieca, come impossibile, ogn' invenzione, che per la Duplicazione del Cubo, o per la Quadratura del Cerchio si proponea; credevano poi esser utilissima cosa lo studiare le altrui Invenzioni fatte a fine di solvere gl' accennati difficilissimi problemi; perche avendo essi formato la vera idea del modo, col quale si deve la Geometria studiare, e degl' utili, che può apportare lo studio di quella; molto bene sapevano, che la mente umana riceve, nello scoprimento di un sottile paralogismo, utile non meno eguale a quello, che s' hà dallo scoprire una nuova, e poco importante verità; e ciò a cagione, che la mente umana ritrae ugual profitto dall' imparare ad emendarsi, che dal dedurre verità da verità: ed in questa guisa gl' antichi geometri non solo non avrebbero osato rappresentare a' loro discepoli, come vano, ed inutile lo studio delle mie proposizioni, ma gli avrebbero animati a studiarle per vedere se mai avvenisse, che le ritrovassero vere, e sossistenti; o almeno per far, che s' accostumassero a scoprire alcun sottile paralogismo, che forse in quelle si potesse contenere. Così dunque gl' antichi geometri pervenuti bensì della difficultà di un tanto Problema, ma non già impegnati a sostenerlo per vano, ed inutile, avrebbero proposto a' loro discepoli di studiare le mie proposizioni, i quali studiandole, le avrebbero vere, e sossistenti conosciute.

Quel-

Quella, che hò narrata, è a mio credere, l'istoria di quello, che mi sarebbe con gl' antichi geometri avvenuto: ma io non voglio già essere un così affettato laudatore degl' antichi, che voglia, come quel sempre Laudator temporis acti, *persuadere a me stesso, ed agl' altri, che lo scoprimento di un tanto desiderato Problema, quanto è la Duplicazione del Cubo, non avesse ancora, negl'animi di quei grand' uomini, quelli perniciosi effetti prodotto, che la livida invidia negl' animi di tutti gl' uomini suole, a danno degl' Inventori di nuove cose, produrre. Io sò troppo bene, che le passioni sono nate quasi che tutto ad un tempo coll' uomo, e che perciò sono dall' uomo inseparabili; ma sò altresì, che la diversa educazione, i diversi modi, che si usano nello studiar le scienze, e le diverse massime, e i diversi abiti, che dalla prima infanzia s'insiriscono ne'loro animi rendono gl' uomini più, o meno costumati, e con ciò più, o meno dannosi a gl' onorati, e virtuosi seguaci delle scienze, e delle virtù; ed in conseguenza di ciò è da credersi, che quegl'antichi uomini non in tutto, dall' impero della livida invidia, esenti, ma nelle loro passioni medesime più castigati, e corretti, che i nostri moderni, avrebbero per avventura, dopò aver conosciuta la verità delle mie dimostrazioni, detto, ch' egli è per accidente, e non per opera d'un ingegno agl' altri superiore, ch' un tal Problema io abbia ritrovato; avrebbero rappresentata la mia Invenzione, come una cosa, ch' era avanti gl' occhi di tutti, e ch' essi si erano dimenticati a cagione, che avevano la lor mente in altre più sublimi specolazioni impiegata.*

Io all' incontro avrei risposto, che tutte le cose sembran facili, dopò che si sono conosciute, laddove eran difficilissime prima di conoscersi: avrei detto, che la natura opera per vie semplicissime, e che per ciò chiunque vuole i difficilissimi arcani della natura scoprire, bisogna che ritrovi quelle vie semplici, ch' ella usa nella formazione delle cose; ma che difficilissima cosa è scoprire la semplice meccanica, che la natura usa nella formazione delle cose tutte; e che lo stesso è, ch' esser ingrati agl' Inventori, il contendere a quelli la gloria, che loro si deve: avrebbero forse detto quelli antichi geometri molte altre cose contro di me, le quali, non m' è possibile tutte

pen-

pensare, ma io a tutte quelle mi sarei ingegnato di rispondere. E' certissimo però, che non avrebbero voluto pregiudicare a loro stessi, con appalesarsi al Mondo poco intesi di Geometria, mostrando di non intendere la verità delle mie dimostrazioni; ed è certissimo ancora, che dopò aver conosciute vere le mie dimostrazioni, non avrebbero osato, come di alcuni è avvenuto, di rappresentare a' loro discepoli la mia Invenzione, come opera di un' ostinato Visionario, che o non intende il suo errore, o non hà coraggio di confessarlo; perche ciò facendo, avrebbero temuto d' inciampar nella taccia di poco sinceri, e di screditare con ciò il lor nome nella mente de' posteri, e de loro seguaci medesimi. Ma già che siam gionti a questo passo d'esaminare, s' egli si debba a me, ovvero ad alcuni signori moderni matematici questo gran difetto attribuire, cioè, di non aver coraggio di confessare il proprio errore: Fie bene, che consideriamo un poco il valore di quelle ragioni, in virtù delle quali i signori moderni geometri si sono lasciati persuadere da Renato des-Cartes, a ricever le linee curve d'Apollonio per geometriche, le quali gl'antichi geometri hã sẽpre riputate linee meccaniche: perche in questa guisa conoscendosi il particolare interesse, ch' essi hanno di celare la verità delle mie proposizioni a tutti quelli moderni geometri, che si sono fortemente appigliati alla geometria di Renato; li studiosi di Geometria, ma indifferenti, ed amatori del vero, non si lasceranno dalle vane, ed interessate assertive d' alcuni moderni geometri, distornare dallo studio delle mie vere proposizioni. Dimostriamo dunque l' errore, nel quale sono miseramente inciampati i signori geometri Cartesiani; ma prima additiamo l' idea, che delle curve d' Apollonio, ebbero gl antichi geometri, per poi dimostrare i danni, che nello studio della Geometria, e delle altre scienze ancora, l' Algebra, ed i nuovi calcoli producono. Ragioniamo dunque delle curve.

Renato des-Cartes confessa, come si vedrà in appresso, che gl' antichi geometri riputarono le curve d' Apollonio linee meccaniche; ma poscia pretende, che, non ostante che si construiscono meccanicamente, abbiano le proprietà, che da Apollonio se le assegnano. Io non sò, se Renato abbia pensato, che

gl' antichi abbino creduto, come esso, che le curve d' Apollonio abbiano le proprietà, che se le assegnano; perche egli nel principio del suo secondo libro taccia gl' antichi di soverchi rigorosi in Geometria, ma non si spiega a bastanza intorno a ciò; il certo però si è, ch'egli s' affatica di provare, che sono linee geometriche, con apparenti, e non geometriche ragioni, come meglio farò chiaro in appresso; la qual cosa, a mio credere, non avrebbe egli fatto, se non avesse estimato, come una proposizione quasi dimostrata, e ricevuta da tutti questa cioè: che le curve d' Apollonio hanno le proprietà, che da esso se le assegnano: *Comunque la cosa si sia, farò quì appresso chiaramente conoscere, ch' gli antichi mai han creduto legitime dimostrazioni quelle d' Apollonio fatte in consequenza d' una meccanica construzione.*

Per chiaramente provare, che gl' antichi geometri, come furono Archimede, Pappo Alessandrino, e tutti gl' altri, giamai credettero, che le curve d' Apollonio avessero le proprietà, che dal medesimo se le assegnano; repeteremo un altra volta le medesime ragioni da noi addotte nella Lettera stampata in Roma l' anno 1721. *da noi fatta, e diretta al dottissimo, e gentilissimo Sig. D. Agnello Spagnolo, a fine di appalesare al Mondo i manifesti errori dal Sig. Giacinto di Cristofaro giurisconsulto napolitano commessi in Geometria, nel suo libretto intitolato la dottrina de' triangoli stampato in Venezia l' anno* 1720. *Passiamo ora a provare il nostro assunto, cioè, che gl' antichi geometri come Archimede, Pappo, e gl' altri, non mai credettero, che le curve d' Apollonio avessero costantemente le proprietà, che se le assegnano.*

E' certissimo, che Archimede construisce il problema delle due mezze proporzionali fra due linee rette date coll' interfezzione di due parabole, e che Pappo lo construisce coll' interfezzione del cerchio, e della parabola: ma da tutto ciò non si può dedurre, che quegli antichi geometri abbino creduto le curve d' Apollonio avere costantemente, ed esattamente quelle proprietà, che da esso se le assegnano; perche quegli gran uomini avvezzi a rimirare le cose per la lor dritta idea, sapevano troppo bene, che la meccanica construzione non può vera, ed esat-

esatta dimostrazione produrre; ond' è, che si servirono bensì delle curve, ma se ne servirono in difetto delle linee construite col rigore d'Euclide, le quali desideravano, che si ritrovassero; e per ciò si servirono delle curve d' Apollonio, come di linee di approssimazione, ma sempre desiderorno di trovare un modo per construire, e dimostrare col rigore d'Euclide il problema delle due mezze proporzionali. Veniamo ora alla pruova di questa proposizione.

Renato medesimo confessa, come meglio farò vedere in appresso, nel principio del secondo libro della sua geometria, che gl' antichi riputorono linee geometriche le curve d' Apollonio, e con ciò asserisce, che hanno le proprietà, che da Apollonio se le assegnano; e tutto ciò lo asserisce a cagion ch' egli credeva, che in Geometria la construzione più, o meno esatta non sia necessaria per lo scoprimento delle proprietà geometriche; e che perciò una proposizione meccanicamente construita potess' essere perfettamente dimostrata. Questa è quella proposizione così strana, e così assurda, che or ora farò conoscere, non aver mai pensato gl' antichi, e per prova del mio assunto, pongo il seguente assioma. Vero in quanto al modo dell'essere di una cosa è quello, che non può essere in altro modo, che in uno. *Questo assioma è certissimo, perche tutto ciò, che può essere in più modi, non può esser certamente vero; ed a cagion d' esempio, in virtù di questo assioma son vere tutte le proposizioni di Euclide, nelle quali si dimostra, che una tale proprietà, non può essere in altro modo, che in uno, come per esempio, la quantità di trè angoli di un triangolo, non può essere altra, che uguale a due angoli retti, e lo stesso si dimostra di tutte le proposizioni d' Euclide. Esaminiamo ora, se gl' antichi geometri han mai potuto credere, che le curve d' Apollonio meccanicamente construite abbiano le proprietà, che da esso se le assegnano. E' certissimo, che gl' antichi geometri mai crederono, che le curve d' Apollonio avessero le proprietà, che se le assegnano, perche se pensorono, che il perimetro della parabola si componeva di un aggregato di linee rette, delle quali non conosceano i punti, per dimostrare la loro vera lunghezza, e construirle geometricamente: non poteano credere, che il luo-*

go delle radici delle ascisse dell' asse potess' essere in altro luogo, che in uno, cioè alla curva; che sia così. Se un geometra aveße ritrovato quei punti, per li quali si possono descrivere quelle linee rette, delle quali si compone il perimetro della parabola, certamente le radici avrebbero terminato non più alla curva, ma a quelle linee rette ritrovate: se dunque gl' antichi geometri, in virtù della construzione meccanica, conobbero in generale, che 'l luogo delle radici delle ascisse dell' asse era una curva, cioè la parabola, e che il perimetro di quella si componeva di linee rette, delle quali non conoscevano i punti estremi; certamente non potevano credere, che la curva fusse il luogo dimostrato delle radici delle ascisse dell' asse. Che gl' antichi poi pensassero, che il perimetro della parabola si componesse d' infinite linee rette determinate da' punti da essi non conosciuti egli è certissimo, perche in tutte le lor operazioni, come tale la trattorno; e poi veggiamo, che Archimede fece la quadratura della parabola, supponendola un aggregato di linee rette, perche la credette in genere un aggregato di linee rette infinite; ma egli non è già, ch' Archimede pensasse per ciò d' aver esattamente quadrata la parabola; perche siccome non pensava, che le proprietà, che da Apollonio s' assegnano alla parabola fussero esattamente vere, così supponendole come vere per ipotesi, la quadrò per approssimazione. Ecco dunque chiaramente dimostrato, che gl' antichi geometri credettero, che le curve d' Apollonio, e la parabola in particolare, si componessero di linee rette, ma ciò credendo, mai osorono asserire, che avessero esattamente le proprietà, che da Apollonio se le assegnano, perche se ciò creduto avessero, non avrebbero più desiderato la Duplicazione del Cubo, come l' han sempre desiderata.

Ora qui è da considerarsi, che gl' antichi più moderati, che i moderni nelle loro pretenzioni, non abborrivano di solvere i problemi meccanici, quando li conoscevano utili alle arti; ma non per ciò osavano dire, come dicono i moderni geometri Cartesiani, che i problemi meccanici sono geometrici; che sia così. Veggiamo, che Archimede si servì utilmente delle spirali nelle sue divine Invenzioni, e di tutte le altre linee mec-

meccaniche, e solvè utilissimi problemi nella Meccanica: Ma si lusingò forse per ciò Archimede di aver sciolti geometricamente i problemi meccanici? certo che nò; perchè, come hò detto, se avessero creduto geometricamente sciolti i problemi meccanici, non avrebbero più desiderato la Duplicazione del Cubo. In somma gl'antichi geometri ponevano tutte le idee nella lor vera classa, ed in conseguenza di ciò nelle cose geometriche facevano uso del perfetto raziocinio, ed accostumavano in quello la mente a conoscere il vero unico; ne i problemi meccanici poi cercavano l' utile, e si contentavano dell' approssimazione.

Ma alle antecedenti ragioni da me addotte, per provare, che la Parabola Apolloniana considerata solamente in se stessa, e generalmente, non si dovea così di facile ricevere per linea geometrica, e che perciò gl' antichi geometri mai credettero dimostrazioni quelle d'Apollonio nate dalla construzione meccanica; i signori geometri Cartesiani risponderanno, con quei soliti lor argomenti, da Renato addotti nel principio del secondo libro della sua geometria, a' quali poco men che tutti i moderni geometri si sono arresi. Esaminiamo noi prima brievemente quello, che intorno la natura delle curve dice Renato, per poi esaminare in appresso il valore de' suoi argomenti.

Egli nel principio del secondo libro della sua geometria loda gl'antichi, a cagion che seppero distinguere i problemi nelle loro classi: Veteres optimè considerarunt, quod Geometriæ problematum, alia sint plana, alia solida, alia denique linearia: hoc est, quod quædam eorum construi possint, ducendo tantum rectas lineas, & circulos; cum alia construi nequeant, nisi ad minimum adhibeatur conica aliqua sectio; ac reliqua denique, quin ad constructionem eorum assumatur alia quædam linea magis composita. *Loda Renato in questo paragrafo gl' antichi a cagion ch' egli ancora nella sua geometria si vede costretto di distinguere i problemi solidi da i piani, e construire i primi, avvalendosi, come gl' antichi, delle sezzioni del cono; ma non dice, che gli antichi geometri sempre han desiderato di ritrovare una via di construire i problemi solidi col rigore de' postulati di Euclide, e con ciò liberarsi dall'*

dall' obbligo di porre quella distinzione frà gli problemi piani, e solidi, alla quale si ridussero solamente dalla necessità costretti: ed ecco che in questa guisa, già Renato rappresenta, come impossibile, la soluzione de' problemi solidi per la via piana. Indi conoscendo egli, che la sua dottrina poco utile arrecava alla Geometria, se le curve d' Apollonio non si consideravano per linee, le quali avessero constantemente le proprietà, che da Apollonio se le assegnano; pensò d' incolpare gli antichi geometri di cecità, perche aveano dubbitato intorno alle dimostrazioni d' Apollonio, e non s' erano affaticati d' ingrandire, ed ampliare quella dottrina delle curve, ch' egli già riputava in tutto legitima, ed utilissima: Verùm satis mirari non possum, quod non ulterius lineas hasce magis compositas, in certos distinxerint gradus, neque etiam planè capio, cur illas potius mechanicas, quam geometricas nominaverint. *L' antecedente, ch' abbiamo narrata è l' idea generale della nuova dottrina, che Renato hà preteso di stabilire fra li geometri: ma perche abbiamo poc' anzi narrato le possenti ragioni, dalle quali gl' antichi geometri furono indotti a dubitare delle dimostrazioni d' Apollonio; uopo è ora esaminare il valore delle ragioni, colle quali Renato si è sforzato di stabilire la sua nuova dottrina. Egli asserisce, che in Geometria l' esattezza della construzione niente importa per condurre all' esatta dimostrazione, in virtù della quale ragione egli pretende di stabilire la seguente ardita proposizione, cioè*: che dalla construzione non esatta, cioè non fatta per i postulati d' Euclide, si possa perfetta dimostrazione dedurre; *ond' è, che tratta per stromenti meccanici egualmente il compasso, che lo stromento di Platone, e tutti quei meccanici stromenti, per mezzo de' quali si construisce solamente per la via de' moti composti*: Etenim si dicatur ideò id fuisse factum, quod instrumento quodam, ad illas in plano describendas, uti opus sit, circuli quoque, & rectæ lineæ ob eamdem rationem reijciendæ essent, cum absque circino, & regula, quæ non minus instrumenta dicenda sunt, in charta describi non possint; neque etiam ideo, quod instrumenta, quæ describendis illis inserviunt, utpotè magis composita,

quam

quam regula, & circinus, nequeant esse tam exacta: quandoquidem ob hanc rationem potius repudiandæ forent ex Mechanica, ubi tantum accurata operis convenientia, quæ a manu proficifcitur, desideratur, quam ex Geometria, ubi folum spectatur exacta ratiocinatio.

A questi sì fatti apparenti argomenti si dovrebbe solamente rispondere con estrinseche ragioni; perche alla perfine il dire, che in Geometria, nella quale si considera la quantità, la più, o meno esatta construzione niente importa per quel che s' attiene allo scoprimento delle particolari proprietà geometriche, è un confondere gl' universali, con i particolari, ed è lo stesso, che dire, che quelle cose, le quali sono le medesime fra esse nel genere, siano anche le medesime nella specie; la qual proposizione è troppo assurda per quelle menti, che mirando da metafisici nella vera natura delle cose, san conoscere, quanto le cose particolari, che convengono fra esse nel genere, possan essere fra esse diverse considerate in particolare: Alla perfine avviene del compasso, e degli stromenti meccanici quello appunto, che diss' io nel libro da me pubblicato contro il libro della dottrina de' triangoli del Signor Giacinto di Cristofaro, cioè, che l' istessa cosa è paragonare al compasso gl' altri stromenti meccanici, a cagion che convengono fra essi nel genere di stromenti, che paragonare un rozzo, ed incolto uomo nato nella Laponia ad un Greco, ad uno Ateniese, ad un Platone, ad un Pitagora, solamente, perche convengono questi col Lapone nel genere di esser uomini. Con tutto ciò però noi vogliamo con intrinseche ragioni far conoscere, come, nel cerchio prodotto dalla descrizzione del compasso, si veggono esattamente le proprietà; in vece che non si possono mai vedere nelle linee curve con meccanici stromenti construite.

La riga, ed il compasso, quantunque siano stromenti, in virtù però dell' operazione, che con quelli si fà, producono le più semplici cose, che da un uomo, da un Angelo, o da qualunque più perspicace creatura si possono imaginare nella quantità; e queste sono la linea retta, e la periferia del cerchio. Ora questa semplicità fa sì, che 'l geometra sia sempre certo del vero luogo di quel punto, che la riga, ed il compasso hanno a lui additato-

ditato; imperciocchè nella riga vi stà designata tutta la linea retta, e nel compasso, che si gira in se stesso, vi stà designato tutto il cerchio; ond' è, che considerandosi anco in astratto un triangolo già formato dalla riga, ed un cerchio già formato dal compasso; il geometra puole dedurre le proprietà; in vece che, se si suppone descritto il perimetro della parabola, il quale addita i punti estremi, delle radici delle ascisse dell' asse per lo mezzo di diverse righe, le quali si girano in diversi modi; il geometra non può mai imaginare quei punti, ne' quali terminano le linee proporzionali, che formano gli triangoli simili, formati dallo stromento meccanico, e ne meno può per lo mezzo dello stromento meccanico esser sicuro del luogo, nel quale terminano le radici delle ascisse dell' asse. Ecco dunque, che la diversità, che vi è frà le linee construite col compasso, e colla riga, e le linee construite con gli stromenti meccanici, anco considerata in astratto, ci fà conoscere, che le linee construite col compasso, e colla riga ci danno sicuramente le proprietà; in vece che le curve construite con gli stromenti meccanici non dandoci sicuramente il luogo de' punti, a i quali terminano le radici, non ci possono mai dare sicuramente le proprietà, ma questo lo dimostreremo geometricamente in appresso. In tanto vogliamo quì far chiaramente conoscere con quanta diversa idea si debba mirare il cerchio da quella, colla quale si mirano le linee prodotte dagli stromenti meccanici; e per provar ciò, vogliamo far conoscere, che il cerchio è quella figura, la quale in virtù della sua semplicità non può essere in altro modo, che in quello, col quale da noi si descrive, ciò che non avviene delle curve descritte collo stromento meccanico.

La periferia del cerchio è prodotta da una linea retta, la quale si gira sempre uniformamente in se medesima, e girandosi uniformamente in se medesima descrive punti, che sono sempre ugualmente distanti dal centro; e così la periferia si compone da' punti estremi d' infinite linee rette, tutte uguali fra esse, le quali tutte partono da un medesimo punto. Ora questa è quella curva, la quale hà costantemente in ogni punto le proprietà, che se le assegnano; e che sia così. Non possono li geometri, nel considerar questa curva, temere, che un altra più semplice constru-

zione

zione, che quella del compasso, possa far mutare il cerchio di aspetto, e di figura, perchè non possono dire, che la periferia del cerchio costa d' infinite linee rette, o d' altre linee da noi non conosciute; ma possono sicuramente dire, che il cerchio non può essere in altro modo, che in quello, col quale per lo mezzo del compasso si descrive; perche nella semplicissima descrizione del cerchio la mente umana conosce tutta la proprietà del cerchio, la quale, come abbiam detto, è quella d' essere una figura, la di cui periferia costa di punti estremi d' infinite linee rette uguali fra esse, le quali tutte partano dal medesimo punto; in vece che, come abbiamo dimostrato, sapendo noi, che le curve d' Apollonio costano d' infinite linee rette, possiamo sempre temere, ch' una descrizione più semplice ci possa far conoscere, che le proprietà, che alle curve noi assegniamo, in altra figura si ritrovino: così dunque, tutto ciò, che non è uno nel modo dell' essere, può esser in più modi, e se può essere in più modi, non hà proprietà certe, e costanti. Ecco dunque dimostrata chiaramente, che la construzione in tutto esatta perfetta dimostrazione produce, in vece che la meccanica construzione non può esatta dimostrazione produrre. Ma a queste nostre ragioni farà forse qualche mal'accorto geometra Cartesiano la seguente difficultà, cioè, che Archimede considerò il cerchio come un poligono d' infiniti lati, e che perciò, quantunque il cerchio sia stato descritto dal compasso, potrebbe un qualche geometra ritrovare i lati del poligono, de' quali egli suppone che si componga la periferia del cerchio, in quella guisa, che noi abbiam detto potere avvenire del perimetro della parabola. Ma a questa lieve difficultà si risponde, che Archimede non mai pensò, nè potè pensare, che la periferia del cerchio fusse un poligono d' infiniti lati; ma solamente pensò, che il poligono d' infiniti lati, quantunque in tutto diverso dal cerchio, fusse la figura più propria per quadrare il cerchio per approssimazione: nella qual cosa non errò, perche l' esperienza ci hà fatto conoscere, che i signori moderni colle loro serie infinite non si sono più approssimati alla proporzione della periferia al diametro del cerchio, che Archimede. Dimostriamo ora, che Archimede non mai pensò, che il cerchio fusse della natura

di un poligono d' infiniti lati.

Si supponga, come vuole l' Oppositore, che il cerchio sia un poligono d' infiniti lati, e si supponga, che si siano già ritrovati li punti, per li quali si possa descrivere questo poligono d' infiniti lati, e che ogni lato di esso sia una quantità minima, quanto si voglia, e che gia sia descritto questo poligono; non perciò questo poligono avrà le proprietà del cerchio; perche se ogni lato del poligono non è un punto, ma una linea, le linee rette, che si conducono dal centro a questi lati, non possono esser tutte uguali fra esse: Ma se noi non possiamo ritrovar nel poligono quelle medesime proprietà, che s' assegnano al cerchio, il poligono non sarà della natura del cerchio, ed il cerchio non sarà della natura del poligono. Oltre a ciò, siccome abbiam detto poc' anzi, se la mente umana, o un Angelo non può immaginare una linea più esatta, che quella della periferia del cerchio dal compasso prodotta; nè meno possiamo noi temere, che si possa giammai mutare nella nostra mente l'idea, ch'abbiamo del cerchio, e delle sue proprietà in quella guisa, che possiamo temere, che la parabola, e le altre curve meccanicamente descritte si possano mutare di figura, in virtù d' una descrizione più esatta di quella, che si fà con lo stromento meccanico; e che in consequenza di ciò si trovino in un altra figura quelle medesime proprietà, che noi assegniamo alle curve. Archimede dunque non suppose il cerchio essere della natura del poligono, ma considerò saggiamente, che il poligono era fra le figure de' lati determinati quella, ch' era la più propria a quadrare il cerchio per approssimazione, e di quella figura inscritta, e circonscritta con mirabil arte si servì per approssimarsi alla quadratura del cerchio: All'incontro suppose, che le curve d'Apollonio realmente si componessero di linee rette infinite, delle quali non si conoscevano li punti, per li quali si potevano descrivere, e perciò a gran ragione, ne Archimede, nè verun degl' antichi volle mai riceverle per linee geometriche. Ecco dunque dimostrato, che le curve meccanicamente construite non possono mai avere proprietà dimostrate, e costanti; ond' è, che a torto Renato si duole degl'antichi geometri, a cagion che sono stati renitenti a volere aggiungere a' postulati d' Euclide il seguente

postu-

postulato cioè: Datum conum, dato plano secare. *Ed ecco come a torto si duole degl' antichi geometri, dopo aver detto, che appartiene a' meccanici, non a' geometri lo ricercar l' esatta construzione*; Quippè quæ procul dubbio, tam hasce lineas, quam illas concernens æquè perfecta esse potest: Neque tandem ea de causa, quod numerum postulatorum suorum augere noluerint; quodque contenti fuerint, modo liceret, data duo puncta recta conjungere linea, atque ex dato cono circulum describere transeuntem per datum punctum. Cum ulterius de conicis sectionibus tractarent. Supponere veriti non fuerint. Datum conum dato plano secare.

Le antecedenti son le ragioni, in virtù delle quali Renato conchiude, che, mal grado la construzione meccanica, si doveano dagl' antichi geometri ricevere per linee geometriche le curve d' Apollonio: Ma quello, ch' è degno di considerazione si è, che dopo aver egli portato le sue estrinseche ragioni à fine, d' indurre noi à ricever le curve d' Apollonio per linee geometriche, si fà dalla parte degli antichi in ciò, che non han voluto ricever le altre linee più composte, come sono le spirali, e la quadratrice: Anzi dippiù attribuisce la ragione dell' ingiustizia, che gl' antichi han fatto alle curve d' Apollonio, nell' aver prima quelli considerato le accennate curve più composte, le quali egli confessa esser meccaniche, insieme colla Concoide, la Cissoide, ed altre simili Verum enim verò fieri potest, ut scrupulus, *e quel che siegue.*

Ora quì dimandarei à Renato, qual limite egli poneva alla construzione per dichiararla legitima, ed abile a discoprirci nelle figure la proprietà: perchè s' egli voleva escludere dalla construzione geometrica tuttociò, ch' è in diversi modi composto, e ricevere per legitimo solamente quello, ch' è perfettamente semplice, come han fatto gl' antichi, egli dovea solamente ricever la riga, ed il compasso; perche, se in genere il composto di diversi moti non mostra le proprietà, niuno stromento composto le può mostrare: e s' egli voleva frà gli stromenti composti di diversi moti assegnar quelli, che a suo credere, mostrano le proprietà, doveva geometricamente dimostrare, che le

curve d' Apollonio descritte collo stromento meccanico mostrano esattamente le proprietà ; ma questo egli non solo non lo hà geometricamente dimostrato, ma non hà portato a favore del suo novello sentimento altro , che quelle estrinseche, ed apparenti ragioni da noi accennate, le quali al certo non sono sufficienti per diroccare una legge di Geometria stabilita , com' egli stesso confessa , da tutti gl' antichi geometri ; donde si vede , che bisogna rispettare l' autorità d' Euclide , di Archimede , di Pappo Alessandrino , e di tutti quelli , che fiorirono nella saggia antichità ; perchè , mal grado le estrinseche ragioni da Renato addotte a fine di avvalorar la construzione meccanica , nella seguente Raccolta io dimostro geometricamente, che le radici, le quali si trovano nella parabola per lo mezzo degl' istromenti meccanici , non corrispondono nell' asse a i punti estremi de' loro quadrati; *onde si conosce manifestamente vana quella proposizione de signori moderni geometri , cioè, che le curve d' Apollonio si possono supponere descritte , perche danno costantemente in ogni punto , a similitudine del cerchio , le proprietà .*

Ma il più bello si è , che Renato stesso non era affatto sicuro della proposizione da esso asserita , cioè : che le curve descritte collo stromento meccanico mostrino esattamente le proprietà ; *perche nel principio del suo terzo libro egli mostra un certo rimorso della proposizione ardita , che aveva asserito, la qual cosa non avrebbe fatto , se avesse creduto di veder tutto nelle curve d' Apollonio meccanicamente construite ; ed ecco di ciò la pruova dedotta dalle sue stesse parole* : Tametsi omnes lineæ curvæ , quæ motu aliquo ordinato describi possunt , in Geometriam sunt recipiendæ, non ideò tamen permissum est , uti indifferenter qualibet , quæ primum occurrat , ad Problematis cujusque constructionem , sed cura semper adhibenda est , ut simplicissimam , cujus ope id ipsum solvi queat , eligamus. Ubi quidem observandum est , per simplicissimas non solum intelligendas esse , quæ omnium facillime describi possunt , neque quæ propositi Problematis constructionem, vel demonstrationem faciliorem reddunt : sed præsertim quæ simplicissimi sunt generis,

neris, quod ad quantitatem quęsitam determinandam inservire queat.

Ecco dunque, come Renato mostra, che per massima generale si deve nel construire seguir sempre il più semplice; e perciò egli non può riputare affatto sicura la construzione meccanica, mentre non può asserire, che non se ne possa trovare un altra più perfetta di quella, ch' egli usa per lo mezzo del suo stromento meccanico, mentre sapeva, che v' è fra' geometri la construzione semplice del compasso; e che Renato non era bene sicuro della sua proposizione, cioè, che la construzione meccanica fusse affatto legitima, e valevole a scoprir le proprietà geometriche, lo fà egli conoscere nelle seguenti parole. Quemadmodum exempli causa, ad inveniendas tot lineas proportionales, quot libuerit non opinor modum ullum faciliorem dari, nec cujus demonstratio evidentior sit, quam si curvæ lineæ adhibeantur, quæ per instrumentum supra explicatum describuntur &c. *Ora quell'* opinor *fà chiaramente conoscere, ch' egli non era ben sicuro, che non si potessero ritrovare per la via semplice d' Euclide le due, ed infinite mezze proporzionali in quella guisa, che le hò io ritrovate; perche se egli fusse stato ben sicuro, che il suo stromento meccanico era il più semplice stromento, che si potesse adoperare, non avrebbe detto,* ut opinor, *ma avrebbe detto, che il luogo delle radici non può esser altro, che la curva, a cagion che un altra più semplice construzione non può fare, che si ritrovino in altro luogo dalla parabola diverso. Alla perfine avrebbe detto, come dico io, che non dubbito, che il luogo delle radici si possa ritrovare in altro luogo, cioè, al mio Rettilineo geometricamente construito: Renato dunque dubitava esso stesso della troppo ardita proposizione, che avea asserita, per la qual cosa potrei a buona ragione sperare, ch' egli medesimo renderebbe alle mie dimostrazioni quella giustizia, che ricusano a quelle rendere i suoi seguaci.*

Renato des-Cartes poi, stabilita già colle deboli ragioni, che abbiam narrate, la massima cioè, che le curve d' Apollonio siano linee geometriche, s' appiglia, siccome egli hà detto, a quello, che dovean fare gl' antichi, cioè, ad ampliare la dottrina delle cur-

curve, e per lo mezzo del calcolo analitico a ritrovar curve infinite, le quali tutte egl'impiega alla soluzion de' problemi di tutt' i gradi, e s'affatica dimostrare l' utile, che produce il suo calcolo analitico coll' esempio di molti problemi, ed in particolare di quello soluto da Pappo per la via sintetica: Alla perfine persuade a' geometri ad appigliarsi intieramente a questo metodo di calcolare, abbandonando in tutto, nella soluzione de' problemi, la via sintetica; siccome si vede in una sua lettera, nella quale ragionando del problema della Rolletta, che si aggitava ne' suoi tempi, rimprovera a' geometri la lor cecità di voler seguire la via sintetica, quando appigliandosi al calcolo analitico, potevano agevolmente, e senza fatica solverlo: Ma quanto la licenza, che Renato hà nella Geometria introdotta, e l' uso del calcolo abbino alla purità, ed all'ingrandimento delle scienze nociuto, vogliamo ora brievemente dimostrarlo; ma prima vogliamo additar la cagione, per la quale tutt'i matematici moderni han ricevuto le curve per linee geometriche, e si sono appigliati all' Analitica, la Sintetica abbandonando.

Egli è certo, che il più gran danno, che l' anima umana pruova dall' esser al corpo congionta è quello abborrimento, ch'ave a volgersi alla intera, e pura riflessione per meditare in astratto senza l' ajuto de' sensi; e ciò avviene, perche quantunque vero sia, che l' anima, come da Dio discesa, ritenga sempre quell'amore verso le conoscenze del vero, che Iddio ave a lei dato nell' atto, che l' hà creata: Con tutto ciò però i sensi tenendola sempre occupata nelle cose esteriori, han sì gran forza di tenerla lungi da quell' amore di conoscenze, alle quali sempre aspira per sua natura, che grandissimo fastidio ella sente nell' astrarsi dalle sensibili cose per ragionare in astratto. Questa verità ce la fanno chiara gl' uomini tutti, che si servono prima del senso dell' immaginativa, che della ragione, ed esempio ce ne danno per pruova i fanciulli, i quali con somma facilità si conducono ad esercitarsi in tutti quegli esercizj, che pratica s' addimanda; ed all' incontro somma fatica si esperimenta per indurgli a volger lo spirito allo studio delle scienze, per l' acquisto delle quali, attenzione di mente, e raziocinio si richiede.

Ora

Ora posto questo principio; è da sapersi, che gli calcoli pratici, di qualunque genere che siano, hanno la forza di allettar l'anima, a cagione che gli sembra, che quei pratici calcoli appaghino l'amore innato, che ella hà verso le conoscenze del vero, e nel medesimo tempo la dispensano dalla penosa obbligazione di riflettere, e di ragionare: che sia così, l'anima calcolando non ragiona, perchè il pratico calcolo da altri inventato li somministra quelle verità, ch' ella sarebbe obbligata d'andar cercando a forza di proprio raziocinio; e con tutto ciò s'appaga nel contemplare quelle verità, che senz' altra fatica, che con quella, che apporta la pratica, hà ritrovato. Questa è la cagione in generale, per la quale i signori moderni, geometri han ricevuto con tanto piacere l'uso del calcolo analitico: Narreremo ora le ragioni, per le quali questo calcolo analitico è cotanto pernicioso, quanto noi abbiamo dimostrato, che sia, ne nostri Dialoghi stampati in Amsterdam l'anno 1718. Accenniamo dunque, mà in brieve, i danni che alla mente umana, ed all'ingrandimento della Geometria, il calcolo analitico produce.

Il danno maggiore, che fà l'uso del calcolo analitico, è quello di privar gl' uomini del più importante utile, che apporta lo studio della Matematica; ch'è quello di formare una mente, la quale sia capace di distinguere con sicurezza il vero dal falso in quelli cose, nelle quali nostra mente puole con sicurezza il vero conoscere; così egli è certissima cosa, che l'umana mente è stata da Dio creata con una tale proprietà, che non può mai acquistar le facultà, alle quali s'applica, se non forma sù di quelle un lungo abbito; quindi è, che la semplice idea della dimostrazione, la quale addita alla mente umana l' idea del vero, non può produrre in quella la facultà di distinguere con sicurezza il vero dal falso nella Geometria: e che non possa produrla è certissimo, perchè se la semplice idea della dimostrazione potesse fruttare alla mente umana il grande avvantaggio di distinguere con sicurezza il vero dal falso, dopò studiate le otto proposizioni del primo libro d'Euclide, nelle quali egli ci dà l'idea del teorema, del problema, e di tutti modi, con i quali s'argomenta in Geometria, la mente umana formereb-

rebbe col solo ajuto di quelle proposizioni l'idea del vero, e del falso, e con ciò avrebbe già acquistata non solo la facultà di conoscere il vero, mà il gran privilegio di ragionare nelle materie tutte, e senza inciampare in errore; e tutte le altre proposizioni di Euclide, che sieguono, si studierebbero solamente à fine di erudire la mente nelle proprietà geometriche, e non per disciplinarla nell'esercizio del raziocinio; All'incontro noi veggiamo per esperienza, che in ciò, che appartiene al purgar la mente dall' errore, avviene quello appunto, che avviene all' uomo, il quale vuole nettare il suo corpo dalla lordezza: imperciocchè se questo lascia cader l' acqua, a cagion d' esempio solamente sopra le sue lorde mani, a fine di torre via l'immondizia senza fortemente stroppicciar l' una con l' altra, rimarrebbero sempre lorde, e sozze, quantunque per un secolo intiero facesse cader aqua sopra di quelle. Lo stesso avviene alla mente umana, la quale si sepellisce sì fattamente nella materia nel primo momento, che viene ad abitar nell' uman corpo, che quasi non le rimane più vestiggio di quell' amore, che hà verso le conoscenze del vero; per molto, ch' ella senta narrar dimostrazione, non acquisterà mai la facultà di liberarsi dall'errore, se non formerà un lungo abito ad emendarsi de' suoi errori, ed a più, e più volte contemplar le cagioni de' suoi errori; che vale a dire, formare un lungo abito a solvere problemi geometrici per la via sintetica.

Quindi è, a mio credere, che non è al vero uniforme quella proposizione, colla quale i Signori Analitici dispensano i giovani studiosi dall' obbligo d' esercitarsi nella soluzione de' problemi per la via sintetica, cioè: Ch' egli è sufficiente studiar la Geometria ordinaria, che vale a dire, i primi Elementi d' Euclide; e che poscia l'esercizio della soluzione de' problemi, si deve far per lo mezzo del calcolo analitico, e non per la Geometria sintetica: *perche il semplice studio della Geometria, che chiamano ordinaria, fà nella mente umana quello stesso, che noi abbiam detto far l' acqua, che cade sopra le lorde mani di colui, che vuole nettarle, senza stropicciar l' una con l'altra; ed all' incontro il calcolo analitico non disciplina la mente, perchè conducendola per una via prattica, non s' eser-*

sercita in quello il raziocinio. In somma a quei, che pretendono disciplinar la mente per mezzo del calcolo analitico avviene appunto ciò, che avverrebbe ad un huomo, che pretendesse esercitar le gambe nel camminare con farsi sempre portare dal cocchio. Ma mal grado tutte le antecedenti ragioni da noi addotte, i signori analitici han preteso, e pretendono, che l'Analitica sia più valevole a disciplinar la mente a fine di formar abito a conscere il vero, che la Geometria sintetica, e le ragioni, che apportano, son le seguenti.

Per primo dicono essi, che il mezzo più possente per farci conoscere il vero è quello, di contemplar le cose più che si può in astratto, e con minore ajuto de sensi, che sia possibile; e che perciò additando essi la quantità con semplici lettere, e non con linee, e figure, come s'usa nella Geometria sintetica, accostumano la mente a considerar la materia più in astratto, a cagion che le lettere sono segni meno sensibili, che le linee, e le soperficie.

Per secondo, a fine d'avvalorar l'uso de' loro calcoli, i signori analitici ristringono la facoltà della mente umana in più angusti confini di quelli, che la natura medesima gl'hà ristretti; perche per escludere l'uso della sintetica asseriscono, che la mente umana, dovendo nello scoprimento delle proprietà geometriche aver sempre presente una lunga catena d'illazioni, mentre ne contempla una, l'antecedente le fugge dalla memoria, e dall'imaginazione; e da ciò concludono, che non si possono grandi scoperte fare in Geometria senza l'uso de' calcoli; i quali somministrandoci i modi di signare in carta tutte le illazioni, che la mente fà, quando risolve una quistione, o quando indaga una verità, hanno la forza di condurci ben lungi, e con sicurezza allo scoprimento di quelle verità, alla conoscenza delle quali la mente umana non potrebbe giungere per lo solo mezzo della Geometria sintetica.

Al primo argomento de i sign. analitici si risponde, che non solo signando con le lettere le quantità, la mente non s'accostuma a ragionare in astratto, ma si fà più al senzo soggetta, e si distorna in tutto dal raziocinio, perche quantunque vero sia, che le lettere, con le quali gl'analitici additano la quantità, siano

segnimeno sensibili, che le linee, e le figure; contuttociò la mente, la di cui principal proprietà è il ragionare, non s'esercita per lo mezzo di quelle lettere nel raziocinio astratto; perche, dopò che hà supposto, che A. sia una linea, AB un rettangolo, quando comincia a calcolare, non contempla più in astratto le proprietà, che quelle linee segnate con le lettere in varij modi combinate possono avere; ma facendosi ella dolcemente condurre dal calcolo, si prende come proprie quelle verità, che il calcolo, e non il proprio raziocinio le ave additate: In vece che nella Geometria sintetica, quantunque s'additi la quantità con segni più sensibili, come sono le linee, le superficie, e i corpi ancora; la mente, dopò che hà la quantità signata, è costretta ad incaminarsi col proprio raziocinio per iscoprir le verità, e con ciò s'esercita nel raziocinio. Questo si vede evidentemente nel modo, col quale per la via analitica si solve un problema geometrico; perche, dopò che l'analitico, ave inteso lo stato della quistione, e l'ave espresso nella denominazione, quando poi vuole ritrovar l'equazione, e la riduzione di quella, la mente si lascia in tutto condurre dal pratico calcolo, e con ciò si libera dalla fatica di ricorrere all'industria, a fine di ritrovar per lo mezzo della costruzione le verità a lei ignote, e dal penoso esercizio di ragionare. Alla perfine se non si vuol negare, che la necessità è la madre della virtù, ne men si può negare, che la Geometria sintetica esercita il raziocinio; in vece che il calcolo analitico rende pigra la mente nel ragionare, e la rende inetta all'industria. Ecco dunque, ch'è fallace quello argomento apparente, col quale i signori analitici ci vogliono far credere, che segnandosi con segni più astratti la quantità, la mente contempli meglio le verità, non ostante che poi ragioni più materialmente, perche praticamente ritrova le verità.

Al secondo argomento poi si risponde, che la mente umana non è in così angusti confini ristretta, come i signori analitici ce la rappresentano, a fine di render necessarij a i geometri i loro calcoli; perche se consideriamo le nobili scoperte, che nella Geometria han fatto Euclide, Archimede, Pappo, e gl'altri antichi geometri, conosceremo, che a forza di metodo sintetico

han

han ritrovate quelle verità, delle quali maggiori non ne hanno ritrovate i moderni; mentre, fuori delle invenzioni di nuove curve, delle quali noi abbiamo chiaramente provato l' insussistenza, non veggiamo, che alcuna utile invenzione ci abbina i loro calcoli somministrata; anzi di più veggiamo, che mal grado la perniciosa licenza di prendere un pezzo di curva per retta, ne i loro calcoli delle serie infinite non si sono i signori moderni approssimati più alla quadratura del cerchio di quello, ch' s' è approssimato Archimede; anzi di più puol dirsi, che ne meno son gionti all esattezza di quello. Insomma fuorche alcuna piccola cosa attenente all' uso delle cose fisiche, nelle quali non si richiede l' esattezza, ma basta l' approssimazione, non veggiamo, che i matematici abbino ricavato gran utile dalla geometria de' signori moderni.

Ma qualunque fosse l' utile, che i nuovi calcoli de' signori moderni arrecar potessero per l' uso delle cose fisiche, questo non sarebbe mai da porsi in paragone col danno, che arrecano al più importante nostro affare, ch' è quello di disciplinar la mente nel raziocinio: E invero quando nell' uso de' calcoli la mente contempla le proprietà, che per mezzo di quelli hà ritrovate, non ricava da quelle alcun utile a ragione, che se vuole quella verità con giusta idea rimirare, le rimirerà come cose, che a guisa di proprietà, che sono ritrovate da un altro, e nelle quali ella, per la nobile qualità, che hà di raziocinante, non hà alcuna parte: In vece che quelle verità, che la mente ritrova per lo mezzo del proprio raziocinio sintetico, le mira, e le può mirare come proprie, perche son figlie del proprio raziocinio; in quelle a gran ragione si compiace, e gode in se stessa dell' abito, che ha formato a ben ragionare; in quelle ella si compiace della propria industria nel procacciarsi dalle cose note le ignote, e della propria perspicacia nel dedurre verità da verità fino all' infinito; in quelle essa si conosce certamente nella nobile facoltà di ragionare superiore alle altre menti, le quali non hanno avuto forza di giungere allo scoprimento di quelle verità, ch' essa hà discoperte. In vece che nell' uso de' calcoli analitici una gran mente da Dio creata per ragionare in astratto, la quale isdegnerà forse di piegarsi all' uso delle cose pratiche, si vedrà age-

volmente uguagliata, e forse anche superata da una mente debole, la quale per lo mezzo del calcolo ritroverà egualmente, che la mente forte, delle verità poco importanti sì, ma con tutto ciò dagl' analitici riputate al par di quelle, che le grandi menti ritrovano coll' uso del raziocinio sintetico. In somma sic come il cocchio conduce al termine, che hanno a loro stessi prefisso, egualmente i deboli, che i forti di gambe; così i calcoli conducono allo scoprimento d' inutili verità egualmente le grandi, che le deboli menti; ma poscia sempre avviene, che coloro, i quali sono negl' elementi d' Euclide semplicemente eruditi, e ne' calcoli esercitati, siano inventori in geometria di picciole cose, senza esser geometri, perchè nel tempo stesso, che tal uni ostentano la figura d' inventori, non hanno le facultà di distinguere il vero dal falso; onde poi ne avviene, che nell' esame di una difficile dimostrazione sintetica si perdono, e si confondono. Alla perfine l' invenzione de' calcoli è stata un bel rifugio per quei, che bramano di comparire inventori senz' esser geometri, e perciò l' uso de' calcoli da Renato prima proposto, e poi dagl' altri coll' invenzione di nuovi modi di calcolare ingrandito, hà ritrovato sì gran numero di settatori, come or ora si vedrà.

Quella, ch' abbiamo in breve narrata, è l' idea del danno, che l' uso de' calcoli ave arrecato a quella sublime parte della Matematica, che disciplina delle menti s' appella: chi poi volesse leggere questa materia in altro modo trattata, legga i miei Dialoghi stampati in Amsterdam l' anno 1718. In tanto sia bene or' accennare brevemente quei difetti, che si esperimentano nell' Algebra in ciò, chè riguarda la facultà di scoprir le proprietà geometriche.

Il gran difetto, che s' esperimenta nell' Algebra in ciò che s' attiene allo scoprimento delle proprietà, egli è; che il calcolo analitico addita alcune generali proprietà, ma non addita le proprietà più particolari; e per ciò non facendo discender la mente nella contemplazione de' più minuti particolari, fà, ch' ella non possa formare l' importante abito di far le distinzioni frà le cose, ch' esamina, e le proprietà, che considera; onde poi ne avviene, che accostumata a mirar le cose solamente in generale, s' inganna in quelli particolari medesimi, i quali a lei

sem-

sembra, che dipendono da quelli universali, che conosce; che sia così. Io esamino un problema per il calcolo analitico; in questo il calcolo m' addita, a cagion d' esempio, che il luogo del problema da me cercato è all' equazione quadrata; l' arte mi dà prontamente il modo di costruirlo per lo mezzo del cerchio, e della XXXVII. *del primo d' Euclide: Questo metodo è ingegnosissimo, e sembra a prima vista utilissimo, perche sendo un luogo generale, ed uguale per tutti, pare, che ci dispensi da quella importuna fatica d' andar quasi tentoni cercando nelle diverse proposizioni d' Euclide il luogo del problema; ma con tutto ciò questa soverchia facilità arreca moltissimo danno; imperciocchè, quando la mente cerca nelle diverse proposizioni d' Euclide il luogo del problema, è costretta a discendere ne' particolari, ed a far quelle minute distinzioni fra le cose, le quali cagionano nella mente umana utilissimo abito di ben distinguere ne' particolari: Oltre a ciò questo difetto, ch'è nel calcolo analitico, cioè di non fare discender la mente ne' particolari, rende l' Algebra scarsa, e mancante nelle invenzioni; perchè quanto più la mente discende ne' particolari, tanto più ritrova numero d' importantissime verità assai maggiore di quello, che ritrova, quando si rimane solamente nella contemplazione degli universali: e per ultimo quando la mente s' accostuma nella sintetica ad esaminare i particolari con dimostrazione, diviene sicura delle proprietà particolari, che hà ritrovate; invece che la proprietà generale additata dall' equazione si può ritrovar falsa ne' particolari: Alla perfine gl' analitici fanno tutti, come volgarmente si dice, il latino per una medesima regola, perche si rimangono nelle conoscenze generali, e negli particolari spesse volte si perdono.*

Pruova evidente di questa verità ce l' appresta il gran problema delle due mezze proporzionali da me soluto, perche in tanto hò potuto solverlo, in quanto che sono disceso a considerar le curve d' Apollonio più in particolare, che non le hanno considerate tutt' i geometri; ed a cagion d' esempio. Tutt' i geometri han considerato un asse infinito, ed a i punti di quello hanno immaginate infinite applicate: Io all' incontro insieme con Galileo hò considerato le parti, che s' esprimono

co'

co' numeri 1, 4, e 9, e le radici 1, 2, e 3, e da ciò ne hò dedotto, che 'l luogo delle radici è alla retta, come si vedrà chiaramente nella seguente Raccolta. Ora questa gran verità non si poteva certamente ritrovare, riguardando la quantità più astrattamente, come pretendono, che debba farsi, i signori analitici, ma bisognava discendere ne' particolari più minuti, come hò fatto io, considerando l' asse diviso in quelle parti particolari, che si possono esprimere co' i numeri; proseguendo poi a discendere ne' particolari, hò trovato i luoghi de i cubi, e delle radici essere ancora nelle linee rette, e ciò hò fatto pure discendendo alla considerazione de' particolari più minuti; e certamente il luogo de' cubi alla retta ne men si poteva ritrovare in virtù dell' equazione cubica ritrovata per il calcolo analitico; perchè l' equazione cubica altra cosa non ci addita, se non che il luogo del problema essere al luogo di una potenza di terzo grado, e poscia l' Algebra ci lascia la cura di costruirlo. Ecco dunque, che l' Algebra non solo non insegna di discendere ne' particolari, ma fà, che i geometri errino ne' particolari; perche se vero è, come hò in molti luoghi dimostrato, che il luogo delle radici delle ascisse dell' asse è alla retta, e non alla curva; l' Algebra non somministrandoci altro, che il modo di liberarci in particolare da questi errori, a cagion che noi erriamo ne' particolari, sempre che vogliamo considerarli come consequenze delle proprietà generali, ch' ella ci addita. Alla perfine se non si negano le mie dimostrazioni, non si può altresì negare, che l' Algebra è cagione, che c' inganniamo ne' particolari. Si vedrà poi nella seguente Raccolta quanto minutamente per la via sintetica si contemplino gli particolari; perche in quella, rispondendo ad alcune obbiezioni, farò vedere delle utilissime, ed ingegnosissime distinzioni, che per lo mezzo del calcolo analitico certamente non si fanno. I calcoli analitici dunque non insegnano a discendere ne' particolari, e con ciò privano i geometri dello scoprimento di moltissime importanti verità, e son cagione, che nelle proprietà particolari spesse fiate s' ingannino. Ed il peggio si è, che questo difetto di non discendere ne' particolari, e con ciò di non accostumar la mente a far le distinzioni frà i particolari, che l' uso dell' Algebra pro-

duce nelle menti de' signori geometri, si propaga ancora nello studio della moderna Filosofia; perche in quella ancora si rimangono poco men che tutti nella conoscenza degli universali, e nell' ignoranza de' particolari a noi attenenti; che sia così. Renato des-Cartes, al quale in vero si deve l' obbligazione d' aver insinuato negl' huomini questo modo di procedere con geometrico raziocinio nelle speculazioni metafisiche; dopò aver posto in più bell' ordine la medesima pruova dell' esistenza di Dio, che S. Agostino fà nel suo trattato de libero arbitrio; *ne' particolari poi a noi attenenti, como sono la reale distinzione di Dio dalla materia, che vale a dire la Creazione; nella dimostrazione della Divina Providenza; nell' indagar la natura, e l'essenza dell'anima umana; nel provare il libero arbitrio, e nell'indagare il premio, che Iddio prepara a' buoni, ed il castigo a' rei dopò la morte; e in tutti gli altri particolari a noi più importanti, se ne passa con argomenti brevi, estrinseci, ed apparenti, come si può vedere nella sua* IV, V, e VI *meditazione. Alla perfine Renato fà, a mio credere, in Metafisica quello stesso, che fà nella sua geometria; imperciocche in questa egli, siccome abbiamo dimostrato poc'anzi, dopò averci insegnato il suo ingegnosissimo modo di calcolare, quando giunge alla gran difficultà della construzione, s' appiglia al partito di dimostrare con argomenti generali, ed estrinseci, che le curve d' Apollonio hanno le proprietà, che da quello se le assegnano; dello stesso modo fà in Metafisica: dopò ch' egli hà dimostrato l' esistenza di Dio, quando giunge alla gran difficultà di construir l' Universo, ed a spiegar la natura delle nostre particolari virtù; se la passa pure, come hà fatto delle curve d' Apollonio, e in questa guisa lascia le nostre menti colla semplice universal conoscenza dell' esistenza di Dio, intorno alla quale tutti gl' antichi filosofi son convenuti frà essi.*

Ma il danno maggiore, che 'l non discendere a i particolari cagiona, si è, che gl' huomini accostumati dall' uso dell' Algebra a rimanersi nella conoscenza degl' universali, non avendo poi essi metodo per drittamente ragionare intorno a i particolari; e dall' altra parte poi volendo definir la natura di quei particolari attenenti alla Metafisica, che abbiamo accennati poc'an-

zi,

zi, di quelli con grandissimo danno della Religione, e della Repubblica tortamente giudicano; e quindi è, che veggiamo tante varietà di sette regnar nell'Europa, tutte perniciose alla Santa Religione; mentre chi coll' empio Benedetto Spinosa, facendo tutta una massa di Dio, e della materia, nel tempo stesso, che finge d' inalzar la sua mente fino alla conoscenza delle verità eterne, cade lordamente in un basso, e fangoso Epicureismo; chi disprezzando le scienze naturali, e le virtù umane de' gentili, tratta Platone da un poeta visionario, e tutte le virtù de' gentili da' vizj manifesti contaminate, e con ciò fingendo di voler portar le nostre anime all' acquisto di una virtù più sublime, ch' è la nostra santa virtù cristiana, rende nell' istesso tempo gl' huomini tutti inetti all' acquisto delle virtù civili, ed umane, le quali pur servono di scala all'acquisto delle virtù cristiane; e in questa guisa corrompono l' ordine delle Repubbliche; perche gl' huomini, perdendo affatto di vista l' umana libertà, e con essa l' idea di quella giustizia, che per lo mezzo del lume naturale può nostra mente formare, rimangono servi miseri, e di niuna umana felicità capaci. Ma non è questo il luogo di dilungarci in questa materia, speriamo nella Divina Bontà di pubblicare un giorno una Metafisica, da noi già fatta, nella quale discendendo, come si deve, a tutti i particolari a noi importanti, farem conoscere, che le scienze de' gentili filosofi servono di pruova alle verità a noi cristiani rivelate, e che le virtù de' gentili servono ancora, come abbiam detto, di scala all' acquisto delle virtù cristiane nel tempo stesso, che promuovono la virtù eroica negl' huomini, e sono alle Repubbliche cagione di godere l' umana felicità. Proseguiamo ora, dopò questa brieve digressione, ad accennare i danni, che la falsa geometria de' moderni cagiona alla filosofia, ed all' ingrandimento delle umane scienze.

Se riguardiamo a ciò, che s' attiene all' ingrandimento delle scienze, veggiamo i moderni filosofi attribuirsi lo specioso titolo di spregiudicati, e in consequenza di quello stimare vane visioni tutte quelle sublimi conoscenze, che delle cose naturali le istorie ci narrano aver avuto gl' antichi; e li veggiamo trattare d'inutili applicazioni lo affaticarsi alla soluzione di

quei

quei problemi, de' quali gli antichi han disiderato lo scoprimento, ed in questa guisa imprigionano, per così dire, le menti umane in un angusto carcere, rendendole della conoscenza de' soli universali paghe, e contente. Di questo ne fà manifesta pruova il P. Malebranch nel suo IV. *libro della Ricerca della verità al cap.* III.: *Egli in quel capitolo consiglia gl' uomini ad esser sì fattamente moderati nell' amor verso la gloria, che intiepidisce affatto negl' animi di quelli il disio di seguir quelle virtù eroiche alla Repubblica utilissime, del conseguimento delle quali solamente gl' uomini infiammati d' amor di gloria son capaci; e per provare il suo assunto, tratta di visionarij tutti quei, i quali si lusingano di poter ritrovare la soluzione d' alcuno di quei celebri problemi, che han sempre desiderato gl' antichi; le seguenti sono le sue parole nella nostra italiana favella trasportate.* Egli è senza dubbio, che non si ritroverebbero tante false invenzioni, e tante immaginarie discoperte, se gl'uomini non si lasciassero abbagliare, e propriamente, come esso dice, sbalordire dall' ardente desiderio di comparire inventori: Imperciocchè la ferma, ed ostinata credenza, nella quale sono molte persone, d' aver trovato, a cagion d' esempio, il moto perpetuo, la quadratura del cerchio, o la duplicazione del cubo per lo mezzo della Geometria ordinaria, non per altra cagione si è radicata nella lor mente, se non per quella del gran desiderio, che avevano di comparire al Mondo uomini, i quali avessero ritrovate quelle cose, che gl' altri aveano inutilmente tentate.

Le antecedenti son le maniere, colle quali egli rimprovera a matematici l' ardimento di voler tentare la soluzione di quei problemi, ch' altri non han finora possuto ritrovare; e quantunque sembri, che colle antecedenti parole l' Autore della Ricerca delle verità se la prenda solamente con quelli, i quali si lusingano d' aver ritrovato la soluzione degl' accennati problemi; con tutto ciò però, a mio credere, egli dipinge nella figura di visionarij tutti quelli, che di quei sì fatti problemi tentano la soluzione; perche se egli ragiona di quelli, che si lusingano d' aver sciolto un tal problema, che in verità non han sciolto, ragiona sopra un soggetto, ch' è indegno delle sue

considerazioni; mentre l' amor verso la gloria ci può riempire bensì la mente di una vana speranza, per modo che ci induca a tentar gl' impossibili; ma non può tanto occecar quei geometri, i quali sono di mente sofficiente a distinguere il vero dal falso, che giungano a non intendere un errore, particolarmente in Geometria, quando gli viene da altri insegnato: così dunque non essendo questi sì sbalorditi uomini da considerarsi, dee credersi, che questo Autore ragionasse di quelli, i quali tentano la soluzione di quei problemi, ch' egli stimava impossibile a solversi. Ed in vero è certissimo, che noi non sappiamo alcun uomo, che meriti il titolo d' uomo, il quale occecato dall' amor della gloria si sia fortemente impegnato a sostenere per geometricamente dimostrata, o la quadratura del cerchio, o la duplicazione del cubo: Sappiamo bensì all' incontro, che Giuseppe Scaliggero mosso dall' amor della gloria tentò la quadratura del cerchio, e che si lusingò d' averla ritrovata; mà che poscia avvertito del suo errore dal Padre Cristofaro Clavio, qual saggio ed onorato uomo si ritrattò, rendendo a quello grazie, che l' aveva avvertito del suo errore. Il Padre Malebraneh dunque, o hà ragionato di uomini, che meritano il titolo di uomini, ed hà soppoSto una cosa impossibile ad accadere, e con ciò s' è dato a diveder poco inteso della natura della mente umana; o egli hà ragionato di quei uomini stupidi, i quali non son capaci di conoscere il proprio errore, ed emendarsi anco avvertiti de' loro errori, e questi tali egli non poteva, a buona ragione, addurli per esempio de' danni, che produce l' amor della gloria; perche l' amor della gloria non può guastare quegl' uomini, che la natura hà già formati incapaci d' intender la verità; ond' è, che quantunque si togliesse dal cuore degl' uomini l' amor della gloria, com' esso vuole, non perciò si toglierebbero dal Mondo i stupidi: Dalla qual cosa se ne deduce, che se l' amor della gloria fusse utile alle Repubbliche per altre cagioni, come io tengo fermamente che sia; gli stupidi incapaci d' intedere una verità, che loro s' insegna in Geometria, non apprestarebbono bastante motivo per sbandire dal Mondo l' utilissimo amor verso la gloria. Il Padre Malebranch dunque o hà ragionato di quelli, che sono nati stupidi, ed hà portato, a fine di condannare l' amor verso la gloria,

un

un esempio vano, ed inutile; o hà inteso trattar da stupidi tutti quelli, che tentano i sopraccennati problemi, ed hà malamente ragionato; perche per dire, che de' problemi difficilissimi, come son quelli della quadratura del cerchio, e della duplicazione del cubo, non se ne deve tentar la soluzione, bisogna geometricamente provare, che sono insolubili, e questo è quello, che non hà fatto il P. Malebranch per quanto io sappia. Ma quì risponderebbe egli forsi, che per quel che s' attiene alla Duplicazione del Cubo, potea a buona ragione credere, niuno poterla ritrovare per la via piana; perche sendo egli del sentimento di Renato des-Cartes, cioè, che le curve d' Apollonio abbino le proprietà, che se l' assegnano, non potea pensare, che si potessero descrivere per la via piana.

Ma a questo si risponde per primo, che il cader nell' errore di Renato è proprio, come abbiam detto, di quelle menti, che si rimangono nella superficie delle cose, e si lasciano persuadere dagl' argomenti apparenti: e per secondo si risponde, che quando anche si volesse concedere, che il cubo non si potesse duplicare più per la via piana, dopò che Renato hà dichiarato sciolto il problema per la via de solidi (ciò che non hà osata dire alcuno degl' antichi) come mai poteva egli dichiarare problema insolubile quello della quadratura del cerchio? mentre per quel che s'attiene a questo problema, Renato des-Cartes non ha trovato descrizione meccanica, la quale egli abbia preteso, che dia le proprietà, perche se si parla della quadradrice, egli hà dichiarato il contrario; dunque l' Autore della Ricerca della verità non poteva di propria autorità dichiarare insolubile il problema della quadratura del cerchio: ed in vero noi crediamo certamente d' avere delle ragioni dalla Metafisica dedotte, colle quali si possa provare, che la quadratura del cerchio sia impossibile a ritrovarsi, ma perche non possiamo geometricamente dimostrarlo, non abbiamo ardimento di dichiararlo problema insolubile.

Da quel che abbiam detto chiaramente si conosce, che il P. Malebranch non s' oppone giustamente alla verità, quando asserisce questa proposizione generale cioè, che chiunque s' intesta d' aver duplicato il cubo è visionario. Ma dall' antecedente sua proposizione senza pruova asserita, si conferma sem-

pre più quello, che abbiam detto poc' anzi cioè, che la novella geometria da Renato introdotta, e da suoi seguaci seguitata, guasta, e corrompe le menti de' geometri, e grandissimo danno arreca allo studio della medesima Geometria; perche se si considera il modo, col quale l'Autore della Ricerca della verità, senza esaminare i particolari, decide di quelli, appoggiandosi solamente sopra notizie false, e generali; necessariamente bisogna conchiudere, che la geometria de' moderni non conduce allo scoprimento delle verità particolari; donde poi ne avviene, che fatta pigra nel meditare la lor mente, conosciuto ch' essi hanno pochi universali nello studio della Filosofia, divengono scettici ne' particolari, ed abbracciano quelle perniciose sentenze, che più son proprie ad appagare le loro proprie passioni, ed i lor vani disij.

Da tutto quello, che abbiam detto fin ora intorno a' danni, che le moderne scienze producono, bisogna dedurre; importantissima cosa essere, il ben scegliere i metodi, co' i quali le scienze insegnar si debbano, perch'è certissimo, che, appunto come dicevano gli antichi geometri, difficilmente, senza un profondo studio di Geometria, si può divenire filosofo; ed è certissimo altresì, che in quella guisa, che gli uomini s' accostumano a pensare nella Geometria, dell'istesso modo pensano nella Filosofia; e come pensano nella Filosofia, così pensano nella Morale, e nelle altre scienze tutte; e che da questa catena di scienze son prodotte le virtuose, o le viziose passioni; ed in consequenza di quelle, gl' abiti virtuosi, o viziosi, per lo mezzo de' quali si formano le viziose, o le virtuose Repubbliche: per la qual cosa si dovrebbero da' Magistrati attentamente riguardare i modi, con i quali da' maestri le scienze s' insegnano, per vedere l' utile, e il danno, che dall' insegnamento di quelle può ricavare lo Stato.

Ma io non vorrei gia, che questa specie d' apologetico discorso, che hò fatto contro l' Autore della Ricerca della verità, alcun lo prendesse come diretto contro tutta la Repubblica letteraria de' nostri giorni, perche io contro altri ragionato non hò, che contro i settatori della geometria Cartesiana, i quali per avere a persuasione di Renato troppo inconsideratamente ricevuto per linee geometriche le curve d' Apollonio, ostinandosi a non

non voler confessare il loro errore, trattando da visionarj quei geometri, i quali altro non sono, che ristauratori della vera, ed utile geometria degli antichi: Nel rimanente poi sò assai bene io, che vi sono a' tempi nostri dignissimi, e scienziati uomini; e che nella Francia medesima non mancano uomini, i quali sono, contro i Cartesiani, forti difensori delle scienze, e delle virtù degl' antichi: Il non mai a bastanza lodato Monsignor di Meos fà vedere nel ritratto che fà de' Romani, de' Greci, e degl' Egizj, nel suo libro intitolato Discorsi sopra la Storia, *quanto egli riputasse le virtù degli antichi: Monsignor l' Arcivescovo di Cambray fà vedere nel suo dottissimo* Telemaco, *quanto bene nella sua mente siedesse l' idea dell' Eroe, la quale è sì guasta, e corrotta nelle menti de' nostri moderni, che moltissimi uomini adorano i vizj coperti sotto la maschera di virtù apparenti: Il Sig. la Fevure, ragionando delle virtù degl' antichi, dimostra ancor egli quanto riputasse la poesia di quei grand' uomini: Il Sig. d'* Upin *rimprovera a' suoi francesi i danni, che con le novità, le quali di giorno in giorno introducono ne' studj della Francia, cagionano all' idioma francese, ed anco alle altre scienze: moltissimi sono gl' altri francesi, che rampognano i moderni metodi di studiare; ond' è, che i perniciosi innovatori son anche in Francia da' Francesi medesimi combattuti.*

Io poi certamente non da altro, che dall' amor della verità son mosso a far questa specie di apologetico discorso contro l' Autore della Ricerca della verità; perche per quel che a me s' attiene, sembrami di non poter in alcun modo essere annoverato, a cagion della Duplicazione del Cubo da me ritrovato, fra que' sbalorditi tentatori di cose impossibili, ch' egli accenna, perche la dimostro con pruove geometriche: ed ancorche le mie dimostrazioni non fussero concludenti, ne men merito la taccia d' ostinato, o di visionario; perche se si considera, che da quando comparve alla luce del Mondo l' anno 1714. la mia novella Invenzione, altri Oppositori non ave avuti, che alcuni pochi, le opposizioni de' quali non sono state da alcuno fin ora approvate; e che l' istessa celebre, e dottissima Università *di Lipsia, la quale era fortemente impegnata ad approvarle, a cagione de' miei Dialoghi, non solo non le approvò, ma considerane-*

rando la forza delle mie dimostrazioni disse : Quantum finem suum sit consequtus , alicubi commodius inquirendi occasio erit . *Dalla considerazione dunque di tutte queste cose si conclude certamente, che io non posso esser tacciato di ostinato , o di stupido a cagione delle opposizioni, che ha ricevuto la mia Duplicazione del Cubo , ne per altre opposizioni , che siano state fatte alla mia Invenzione ; perchè dopo le prime da me accennate , tutt' i sig. matematici hanno usato un profondo silenzio , a riguardo della mia Invenzione , con tutto che da me non si è mancato di procurare a me stesso l' avertimento di tutti i più celebri uomini d' Italia , avendo scritte lettere particolari ad alcuno de' dottissimi signori Giornalisti di Venezia, ed a' dottissimi signori Accademici delle scienze di Bologna , richiedendoli del lor sentimento, ed ho impiegato autorevoli,ed efficacissimi mezzi per conseguire l' accennato favore ; e quantunque mi fossi lusingato , che le accennate due celebri adunanze, come interessate nella gloria dell' Italia , dovessero approvare, o disapprovare la mia Invenzione; contuttociò i Signori Giornalisti di Venezia si son rimasti finora con quelle gentilissime relazioni, che in molti de loro tomi han fatta della mia Invenzione ; e per quelche s' attiene a i Sig. Accademici delle scienze di Bologna non hò possuto dal lor silenzio ritrarli.*

Ne vale il dire , che il lor silenzio è cagionato da una certa prudente riserva, che loro sugerisce la massima di non esporsi meco a contesa, a cagione dell' indole di dispute impaziente,che a gran torto alcuni mi attribuiscono;perche se si considerano bene le risentite risposte da me date ad alcuni , si vedrà che ciò non è per altra cagione avvenuto, se non che per i modi autorevoli, e magistrali dà alcuni d' essi meco tenuti.Se poi si volesse dire,che sdegnano di ragionare sù di tal materia , perche troppo manifestamente falsa ; a si fatto motivo mi vergognerei di rispondere , perche sendo io, la Dio mercè, bastantemente noto nella letteraria Repubblica anco per le altre mie opere matematiche , sembrami, che questo ingiusto disprezzo ridonderebbe più a loro, che a proprio mio danno : per concludere dunque il nostro ragionamento dirò, che non mi poteva muovere a far questa specie d' Apologia contro l' Autore della Ricerca della verità il timore,

che

che io potessi avere d'esser annoverato frà quei ostinati, e sbalorditi tentatori di cose impossibili, sù de'quali egli ragiona.

Dopo questo ampio ragionamento fatto intorno alla moderna geometria spero, che i sig. geometri si degneranno di leggere, e studiare le seguenti proposizioni, nelle quali geometricamente io dimostro i veri luoghi, ne' quali son quelle proprietà, che fin ora han creduto, che si ritrovassero alle curve; e che da sinceri uomini, quali devon essere gl'uomini di lettere, e quali essi sono, appaleseranno al Mondo la verità delle mie dimostrazioni. Se poi il contrario di quel che penso avverrà, tolga il Cielo, che io vogli giammai accusare i Sig. moderni geometri di poco sinceri; dirò solamente, che la Repubblica de' sig. moderni matematici regola le sue risoluzioni con quella stessa prudenza, colla quale il Senato Romano si governava. Narra Plutarco nella vita di Numa Pompilio verso il fine, che a cagione d'una inondazione s' infranse l' arca di Numa, dopo che eran già scorsi quattrocento anni dalla morte di quello, e che essendosi in quella ritrovati dodici libri, che trattavano de Jure Pontificio, *ed altri dodici in lingua greca* de Disciplina sapientiæ: *Petilio Pretore in quel tempo consigliò al Senato, che non li pubblicasse, ansi che li facesse abbruciare, acciò non si facessero noti alla moltitudine; e non per altra ragione s'indusse Petilio a dare al Senato questo consiglio, se non perchè vedendo egli, che i costumi de' popoli nel corso di si lungo tempo eran tutti mutati, credeva esser lo stesso, che turbar la Repubblica, lo appalesare a' popoli quelle virtuose leggi di Religione, e di Sapienza, le quali, mercè la mutazione de' costumi, non eran' più capaci di seguire; le seguenti sono le parole di Plutarco:* Non videri sibi, neque fas, neque pium ut quę in libris scripta sunt, audiantur a multitudine; proindeque delatos illos in comitium igni tradidisse. *Dell' istesso modo dirò io, che l'accortissima Repubblica dè geometri de nostri giorni seguace della prudenza di Petilio conoscendo, che la mia Invenzione mostra vane, ed insussistenti tutte le invenzioni, che intorno alle curve si son fatte, dopò che Renato des-Cartes incautamente, (perchè senza alcuna pruova) le dichiarò non esser linee meccaniche, hà creduto di pru-*

prudentemente operare, non approvando la mia Duplicazione del Cubo, a fine di non far palesi alla moltitudine gl'errori, ne' quali è inciampata una gran parte de' signori matematici de'nostri giorni, i quali essendosi abituati a construire meccanimente, ed a dimostrare per lo mezzo de' pratici calcoli, sentirebbero troppo pena a ridursi un' altra volta a seguir quel rigore nel construire, e nel dimostrare, ch' Euclide saggiamente prescrive, e ch'è stato dagl'antichi geometri seguitato, donde la pace della Repubblica letteraria ne potrebbe esser turbata. A saggio dunque, e profondo consiglio de' Sig. moderni matematici, e non mai a malitiosa arte di quelli, attribuirò il loro prudente silenzio; tanto più, che se mai avvenisse, che i sig. matematici Cartesiani si continuassero a governare, a riguardo della mia Duplicazione del Cubo, colla da me accennata prudenza del Senato Romano, io hò ben donde sperare, che i Posteri almeno vorranno prender contezza di questa mia novella Invenzione; perche non avendo i moderni geometri l'autorità d'abbruciar 'i miei libri, in quella guisa, che 'l Senato Romano avea d'abbruciar quei di Numa, non possono far sì, che le mie Opere non giungano alla notizia de' Posteri. Onde io, il quale in virtù dell'educazione, che hò da' miei Genitori sortito, hò accostumato il mio animo a riputare più, che i presenti, e fugaci non meritati applausi, la giusta, e stabile gloria avvenire, mi consolerò agevolmente della non curanza, che i signori moderni geometri facessero per avventura comparire delle mie opere: Ma senza portar' sì lungi le mie speranze, io hò ancora forti ragioni di credere, che frà i viventi geometri quelli, che han fior di senno, conosceranno, che 'l silenzio de' signori geometri Cartesiani da altra cagione non è prodotto, che dalla mancanza di ragioni, ch'è in essi, per opporre alle mie dimostrazioni; ed in consequenza di ciò, i studiosi indifferenti non vorranno lasciare di prender' contezza di un tanto importante Problema, quanto è quello della Duplicazione del Cubo, in tutt'i tempi desiderato, e da veruno ritrovato, e dimostrato, fuori che da mè

Passiamo dunque con questa speranza a far vedere in più modi geometricamente dimostrato, che quelle proprietà, che i Signori geometri han creduto vanamente trovarsi alla parabola Apolloniana, si ritrovano nelle nostre linee rette. RAC-

RACCOLTA

DI TUTTE LE DIMOSTRAZIONI, E CONSIDERAZIONI DELL' AUTORE,

Pubblicate in varj tempi, e in varie Lettere; a fine di dimostrare geometricamente, che la

PARABOLA APOLLONIANA

Non hà le proprietà, che da Geometri se l'assegnano;

Coll' aggiunta d' altre nuove Considerazioni, e d' altre nuove Obbiezzioni, e risposte.

CONSIDERAZIONI

Sopra la Parabola Apolloniana.

PROPOSIZIONE, E TEOREMA.

SE sia data la linea retta AF divisa, per esempio, in nove parti uguali; e dalla prima parte AB, che si prende per unità, sia tirata la BC perpendicolare, e uguale ad AB; e dal punto D termine di AD uguale à 4. unità AB, sia tirata la DE uguale à 2. unità AB, e perpendicolare ad AF; e dal punto F termine di AF9 sia tirata la FG perpendicolare ad AF, ed uguale à 3. unità AB: e per i punti A, C, E, e G siano tirate le linee rette AC, CE, ed EG. Tutte le linee rette perpendicolari ad AF, le quali partono da i punti della linea retta AF, e terminano alla linea retta CE, come per esempio HI &c., sono mezze proporzionali frà l' unità AB, e la porzione della linea AF, dove cade la perpendicolare; per esempio, HI mezza proporzionale frà AB, ed AH. E dello stesso modo le perpendicolari intercette frà DE2, ed FG3, le quali partono da i punti della AF, e terminano alla linea retta EG, come per esempio, TV, &c., sono mezze proporzionali frà l' unità AB, ed AT.

Tav. I. Fig. I.

COSTRUZIONE.

INtendasi la BF, porzione della linea retta AF, divisa in punti, o parti infinite; e da i punti della BD uguale à 3 unità AB intendansi tirate infinite linee perpendicolari ad AD, e parallele a DE, le quali terminino alla linea retta CE, linea, che congiunge per i punti estremi le perpendicolari BC1, e DE2, come per esempio, le perpendicolari P10, SQ.MN, e tutte le altre. E dell'istesso modo da i punti

della DF intendansi tirate infinite linee rette perpendicolari ad AF, e parallele ad FG, le quali terminino alla linea retta EG, linea, che congiunge per i punti estremi le perpendicolari DE2, ed FG3; e prolunghisi la retta EC fin che s' incontri con la DA allungata, come per esempio, nel punto K.

Dico, che tutte le infinite perpendicolari, che terminano alle linee rette CE, ed EG, sono mezze proporzionali frà l'unità AB, e la porzione della linea retta AF, nella quale cadono, come per esempio, HI mezza proporzionale frà AB, ed AH, o sia radice di AH, e lo stesso di tutte le altre.

DIMOSTRAZIONE.

Tav. I. Fig. I.

PErche abbiamo divisa la AF in nove parti uguali, di modo che AB è 1, AD è 4, ed AF è 9; ed abbiamo tirate le perpendicolari BC1, DE2, ed FG3. La BC unità sarà mezza proporzionale frà AB, ed AB medesima, cioè sarà radice di AB. La DE2 sarà mezza proporzionale frà AB unità, ed AD4, cioè sarà radice di AD. E la FG3 sarà mezza proporzionale frà AB unità, ed AF9, cioè sarà radice di AF. Dimostreremo ora, che HI intercetta frà BC1, e DE2, la quale termina alla linea retta CE, è radice di AH.

Perche abbiamo divisa la BF porzione di AF in punti, o parti infinite, tutte le parti della BF saranno in proporzione aritmetica frà esse; perche se ad esse s' aggiunge comunemente AB, tutte le parti, AB, AP, AH, AS, &c. saranno in proporzione aritmetica frà esse.

Dell' istesso modo le infinite parallele intercette fra BC1, e DE2 saranno in proporzione aritmetica frà esse; perchè avendo noi prolungato la EC, e la DA fino in K, abbiamo formato il Triangolo rettangolo KDE; ond'e, che se dal Triangolo KDE se ne toglie il Triangolo KBC, le infinite parallele intercette frà BC, e DE, le quali partono da i punti infiniti della BD, saranno in proporzione aritmetica frà esse.

Ma

Ma se le porzioni intercette frà AB1, ed AD4 sono infinite, e sono in proporzione aritmetica; e le parallele intercette frà BC1, e DE2, sono infinite, e sono in proporzione aritmetica. Nelle infinite parallele intercette frà BC1, e DE2, le quali terminano alla linea retta CE, vi sarà la somma delle radici di tutti i quadrati intercetti frà AB1, ed AD4; Perchè le parallele infinite, le quali terminano alla retta CE, sendo tante in numero, quanti sono i punti della porzione dell' asse BD, e sendo in proporzione aritmetica: Nelle parallele intercette frà BC1, e DE2 vi dev' esser la somma di tutte le differenze, che posson essere fra le infinite radici degl' infiniti quadrati intercetti frà AB1, ed AD4; mà se v' è la somma di tutte le differenze, che posson essere frà le radici degl' infiniti quadrati; le infinite parallele, le quali terminano alla linea retta CE, son le radici degl' infiniti quadrati intercetti frà AB1, ed AD4.

Ogni radice poi cade al punto estremo dell' asse, del quale ella è quadrato, come per esempio, HI radice di AH; perchè il quadrato maggiore avendo radice maggiore, che il quadrato minore; ed il quadrato minore radice minore, che il quadrato maggiore; e le radici intercette frà BC, e DE sendo infinite, ogni radice dourà esser maggiore dell' antecedente, e minore della susseguente, come per esempio, HI maggiore di P 10, e minore di SQ, e perciò ogni radice caderà al punto estremo del suo quadrato; dunque le radici de' quadrati intercetti frà AB, ed AD terminano alla linea retta CE, ch' è ciò si dovea dimostrare.

CONSIDERAZIONE.

Fingiamo ora per impossibile, che un' Avversario negasse, che le radici terminano alla retta CE, e con ciò dicesse, che HI non è radice di AH: Se è così, dimostriam' ora in altro modo, e per la via negativa, che solamente HI è radice di AH. Suppongasi come prima la BD divisa in parti infinite, e tutte uguali frà esse.

DI-

DIMOSTRAZIONE II. DELL' ANTECEDENTE PROPOSIZIONE.

SE HI non è radice di AH, come vuole l' Avversario; la radice di AH sarà una linea, che terminerà, o fuori, o dentro della linea retta CE. Termini prima fuori, e la radice di AH sia, per esempio, HO; se è così, calisi la perpendicolare OQ, la quale termini alla linea retta CE: In questo caso la SQ uguale ad HO, la quale termina alla linea retta CE, sarà ancora radice di AH, e perciò la radice di AH sarà in una linea fuori della CE, ed insieme nella retta CE. Dell' istesso modo S 15, ed MN saranno radici di AS, e lo stesso avverrà successivamente di tutte le infinite radici intercette frà BC1, e DE2.

Tav. I. Fig. I.

Ma se è così, una delle infinite parallele intercette frà BC1, e DE2 sarà maggiore di DE2: perche le parallele, o si suppone, che s' eccedono fra esse in proporzione aritmetica; ed allora, se la radice di AH termina fuori della retta CE, la radice di AD4 caderà in un punto sopra il punto D: o si suppone, che non s'eccedono in proporzione aritmetica; e in questo caso le infinite perpendicolari tirate da i punti estremi delle linee, che terminano fuori della linea retta CE, come per esempio OQ, 15 N, e tutte le infinite altre, divideranno la retta CE in parti infinite, tutte sempre una minore dell' altra; ond' è, che le infinite parallele, le quali partono da i punti della BD, e terminano alla retta CE, non sono in proporzione aritmetica; e se non sono in proporzione aritmetica, l' asse BD non sarà diviso in punti, o parti infinite, siccome noi abbiamo supposto per costruzione, il che è assurdo, perch' è contro l'ipotesi.

Dell' istesso modo si dimostra, che le radici non posson terminare dentro della retta CE, come per esempio, che HR non può esser radice di AH; perche se terminassero dentro della CE, una delle infinite radici intercette frà BC1, e DE2 sarebbe minore di BC unità, il ch' è assurdo. Non possono dunque le radici de' quadrati intercetti frà AB,

AB, ed AD terminare nè fuori, nè dentro della linea retta CE, dunque terminano alla retta CE, ch' è ciò si dovea dimostrare.

Dell' istesso modo si dimostra, che la parallela TV intercetta frà DE2, ed FG3, la quale termina alla linea retta EG, è radice di AT; Perche se si prolunga la retta GE fin che s' incontri con la TA allungata, si dimostra, che le parallele infinite intercette frà DE2, ed FG3 sono in un Triangolo rettangolo, e perciò sono in proporzione aritmetica; e che TX, che termina fuori della EG, non può esser radice di AT; e che niun altra, che termina dentro di EG può esser radice di AT; e perciò le parallele intercette frà BC1, e DE2, le quali terminano alla retta CE, son radici de' quadrati intercetti frà AB1, ed AD4; e le parallele intercette frà DE2, ed FG3, le quali terminano alla retta EG, son radici de' quadrati intercetti frà AB1, ed AD4, che è ciò si dovea dimostrare.

CONSIDERAZIONE.

IN conseguenza delle antecedenti dimostrazioni riman provato, che la Parabola Apolloniana non hà le proprietà, che se l' assegnano; perche, se io hò dimostrato, che le radici infinite, le quali terminano alla mia linea retta, son radici delle ascisse dell' asse; le applicate, che terminano alla Parabola Apolloniana non posson essere radici dell' asse.

Le due antecedenti dimostrazioni in sostanza son le medesime, che si leggono nella proposizione prima del Ristretto, che del Mio Nuovo Metodo hò fatto ne miei Dialoghi: Ma perche mi avvedevo, che quanto più io dimostravo, tanto meno approvazione ritrovavo da alcuni Signori Matematici. Fatta seria riflessione alle mie antecedenti dimostrazioni, dubbitai, che quei Signori Matematici, i quali trovavo renitenti ad approvare la Mia Opera, pensassero forse, che non fusse necessario; *Che le radici delle ascisse dell' asse fussero in proporzione aritmetica frà esse*; ma che potesse-

ro

ro ecceder si con altre differenze, dalla proporzione aritmetica diverse, e con tutto ciò esser radici dell' ascisse.

A questo io rispondevo, che da Signori miei Oppositori non può dirsi, che le radici posson terminare al perimetro della Parabola, senza che sia necessario, che le infinite siano in proporzione aritmetica; perche avevo io già dimostrato, che in qualunque proporzione, che si voglia, che siano le radici, non posson terminare nè fuori, nè dentro: Con tutto ciò, benche lo riputassi superfluo, nella Lettera, che indrizzai al Sig. Giacinto di Cristofaro, li dimostrai, che necessariamente le radici infinite intercette frà BC1, e DE2 non posson essere radici delle ascisse dell'asse, se non sono in proporzione aritmetica. Ora la dimostrazione da mè fatta in quella Lettera è la medesima, che pongo quì appresso in forma di proposizione, e con ciò si vede, avere io fatta la terza dimostrazione alla mia Proposizione.

PROPOSIZIONE.

SE le applicate infinite all' asse della Parabola Apolloniana non s' eccedono in proporzione aritmetica, non posson essere radici delle ascisse dell' asse.

COSTRUZZIONE.

Tav. I. Fig. II.

SUppongasi descritta la Parabola Apolloniana nel modo insegnato da Galileo; cioè, che AB sia 1, BC1, AD4, DE2, AF9, ed FG3.

E suppongansi, come prima, tirate per i punti A, C, E, e G le nostre linee rette AC, CE, ed EG; e suppongasi la EC allungata, fin che s' incontri coll' asse FA allungato, come per esempio, nel punto K.

Suppongasi poi per i punti A, C, E, e G descritta la Parabola Apolloniana, il di cui perimetro sia una linea curva; e suppongasi la BD divisa in punti, o parti infinite, tutte uguali frà esse; e da ogn' uno degl' infiniti punti della BD intendasi tirata un' applicata, la quale termini

alla

la curva ACE, come per esempio, HI, LM, NO, &c.

Dico, che se le applicate intercette frà BC1, e DE2, le quali terminano al perimetro ACIME &c. non sono in proporzione aritmetica, non posson essere radici dell'ascisse intercette frà AB1, ed AD4. E dello stesso modo, che se le applicate intercette frà DE2, ed FG3, le quali terminano al perimetro della Parabola, non sono in proporzione aritmetica, non posson essere radici delle ascisse dell' asse, nelle quali cadono.

DIMOSTRAZIONE.

Supponiamo per primo, che le applicate, le quali terminano al perimetro della Parabola ACIME &c., siano tutte una maggiore dell'altra, ma che s'eccedano frà esse con differenze, che siano sempre una minore dell'altra. In questo caso, non si potrà mai giungere nell' applicata DE; perche, se dagl' infiniti punti dell' AD si vogliano tirare infinite linee parallele a DE, le quali siano tutte una maggiore dell' altra, ma che s'eccedano con differenze una minore dell'altra; la BD sarà divisa in parti, le differenze frà le quali saranno sempre una minore dell'altra, e perciò non si potrà mai giungere nel punto D, nè tirare la parallela DE2, ciò ch' è contro l' ipotesi.

Tav. I. Fig. II.

Supponiamo per secondo, che le applicate infinite s'eccedano frà esse con eccessi maggiori della proporzione aritmetica; cioè, che la differenza frà LM, e HI sia maggiore della differenza frà HI, e BC: se è così, nelle applicate intercette frà BC1, e DE2, si troverà un applicata, maggiore di DE2, la quale caderà sopra 'l punto D, come per esempio, nel punto X, ovvero T: Perchè le applicate infinite sendo tante in numero, quanti sono i punti della BD; gl' eccessi, co' quali le applicate si eccedono l' una l' altra sono ancora tanti in numero, quanti sono i punti della BD; e perciò se non s' eccedono con eccessi uguali, e s'eccedono con eccessi uno maggiore dell'altro; la somma di tutte le differenze, che v' è frà le applicate intercette frà BC1, e DE2

si troverà in una applicata sopra del punto D, come per esempio, nell'applicata XY, o TV: non possono dunque le radici eccedersi frà esse con eccessi uno sempre maggiore dell' altro. Mà se le radici non si possono eccedere fra esse con differenze maggiori, o minori della proporzione aritmetica; le applicate, che terminano al perimetro della Parabola Apolloniana, come ACIME &c., non posson essere radici delle ascisse dell' asse, mentre non sono in proporzione aritmetica, ch' è ciò si dovea dimostrare.

CONSIDERAZIONE. I.

Quello, ch' abbiamo dimostrato poc' anzi, si puol vedere ancora in numeri, ed ecco come. Io posso alle infinite radici intercette fra BC1, e DE2, ed agl'infiniti quadrati intercetti fra AB1, ed AD4, assegnare qualunque numero in se finito, prendendolo per ipotesi come infinito; e così ritrovar sempre in quel numero finito, ch' io prendo come infinito, quelle medesime proprietà, ch' hò dimostrato, ritrovarsi nelle infinite radici, e negl' infiniti quadrati; ed eccone la pruova.

Quando io prendo tutti i punti intercetti fra AB, ed AD, prendo gl' infiniti punti; perchè lo stesso è dire tutti i punti, che dire gl' infiniti punti; e perciò se io dico per ipotesi, che gl' infiniti punti intercetti fra AB, ed AD, siano per esempio, 15; in questo caso il numero 15, benchè in se finito, rappresenta però l'infinito, perche disegna gl'infiniti punti. Tutt' il contrario avviene, se nelle ascisse io prendo 3, 4, o 5 punti particolari; perche in tal caso questi punti particolari non rappresentando tutti gl' infiniti punti, non si possono in questi punti particolari ritrovare le stesse proprietà, che si dimostra essere negl' infiniti: Così dunque prendendo noi per ipotesi numeri finiti, come infiniti, ed assegnandoli a gl' infiniti punti dell'asse, faremo vedere sensibilmente quello, ch'abbiamo dimostrato, cioè; che le radici infinite devono essere in proporzione aritmetica.

Suppo-

Supponiamo prima, che le radici si eccedano con eccessi sempre uno minore dell'altro;e che gl' infiniti quadrati intercetti frà AB,ed AD, e le infinite radici siano, per esempio, 15 in numero, e le radici BC,HI,LM,NO, &c. s'esprimano co' seguenti numeri, cioè

$$1$$

$$1\tfrac{1}{15}$$

$$1\tfrac{1}{15} \quad \tfrac{1}{30}$$

$$1\tfrac{1}{15} \quad \tfrac{1}{30} \quad \tfrac{1}{60}$$

$$1\tfrac{1}{15} \quad \tfrac{1}{30} \quad \tfrac{1}{60} \quad \tfrac{1}{120},$$ e così fino all' infinito; se è così, mai si giungerà nell' applicata DE2.

Supponiamo poi, che le radici s'eccedano con eccessi maggiori di quelli, co' quali s'eccedono in proporzione aritmetica; e fingiamo come prima, che gl' infiniti quadrati, e le infinite parallele siano 15 in numero; e che le radici s'esprimano co' medesimi seguenti numeri, cioè

$$1$$

$$1\tfrac{2}{15}$$

$$1\tfrac{3}{15}$$

$$1\tfrac{4}{15}$$

$$1\tfrac{5}{15}$$

$$1\tfrac{6}{15}$$

In questo caso si troverà il $\frac{15}{15}$, cioè l' applicata 2 nel punto 14 dell'asse AD, che vale à dire, nel punto X immediato sopra 'l punto D, ed eccone la pruova

BC è $\frac{1}{15}$

HI è $\frac{3}{15}$

LM è $\frac{4}{15}$

NO è $\frac{5}{15}$; Ed alla persine XY, che cade nel punto 14 della BD, sarà $\frac{15}{15}$, e perciò uguale a 2. E se si suppone, che le radici s' eccedono con differenze ancora maggiori; si troverà sempre la DE in un punto più vicino al punto B, come per esempio in T, in R, &c.

Lo stesso si ritroverà in qualunque numero di parti, che si voglia supponer diviso l' asse AD; e in qualunque numero, che si voglia assegnare alle radici uguali in numero alle parti dell' asse; e perciò si vede anche sensibilmente in numeri, che se le applicate all' asse non sono in proporzione aritmetica, non posson essere radici delle ascisse dell' asse.

CONSIDERAZIONE II.

DAlle trè antecedenti dimostrazioni si conchiude, che le infinite radici degl' infiniti quadrati intercetti frà AB1, ed AD4 non possono terminare in altra linea, che nella retta CE; Perchè dovendo le radici esser intercette frà BC1, e DE2, non possono terminare in altro luogo, che in una linea, la quale passi per i punti estremi di BC1, e DE2; e dovendo le radici infinite essere in proporzione aritmetica, non possono terminare in altra linea, che nella ret-

retta CE, la quale è porzione dell'ipotenusa KE.

CONSIDERAZIONE III.

Dopò le tre antecedenti dimostrazioni, nelle quali hò io provato, che le infinite radici terminano nelle mie linee rette; sembra, che non sia permesso a' Sign. Geometri poter fare opposizioni, deducendo assurdi particolari dalle mie proposizioni generali, e dimostrate: Perche se io hò dimostrato, che le infinite radici degl' infiniti quadrati intercetti frà 1, e 4 terminano nella linea retta CE; è certissimo, che niuna radice particolare può terminare in altro luogo, se non che nella linea retta CE; perchè le radici infinite comprendendo in esse tutte le particolari, niuna radice particolare può terminare in altro luogo, se non in quello, nel quale le infinite radici terminano. Con tutto ciò però, non sarà inutile il riferire quì per avvertimento di chi legge, alcuni di quei errori, che nell'opponere sogliono prender quei Signori Geometri, ch' amano più d'impugnare, che di studiare le altrui invenzioni; ed a cagion d' esempio.

Tav. I. Fig. II.

Volendo alcuno Oppositore provare, che le radici infinite non sono in proporzione aritmetica; in vece di studiare le mie dimostrazioni, ricorresse a qualche particolare, o con ciò pensasse, male a proposito, di ritrovare qualche assurdo, per distruggere la mia proposizione generale dimostrata; come per esempio, volendo provare, che i quadrati non sono in proporzione aritmetica, dicesse così: Le radici 1, 2, e 3, &c. sono in proporzione aritmetica, ma i quadrati 1, 4, e 9, non sono in proporzione aritmetica, dunque non è vero, che se le radici sono in proporzione aritmetica, i quadrati ancora debbon essere in proporzione aritmetica. Sarebbe questa opposizione malamente dedotta da un particolare, che niente s' oppone alla mia dimostrazione, come si vede nella seguente risposta.

Si risponde, che quello, io hò dimostrato si è, che i quadrati infiniti, che sono in proporzione aritmetica,

ca , sono i quadrati infiniti delle infinite radici intercet-te frà BC1, e DE2 ; cioè gl' intercetti frà AB1 , ed AD4 ; donde poscia hò dimostrato , che sono in proporzio-ne aritmetica frà essi i quadrati infiniti delle infinite radi-ci intercette frà DE2 , e FG3 ; cioè gl' intercetti frà AD4, ed AF9 . Ma giammai hò preteso di aver dimostrato , che le infinite radici intercette frà 1 , e 3 siano nella medesima serie di proporzione aritmetica ; nè che i quadrati inter-cetti frà 1, e 9 siano in proporzione aritmetica. E' dunque manifesto , che in questa guisa opponendo , questo Oppo-sitore , peccarebbe in Geometria , supponendo quello, che l'Autore non suppone ; e confondendo gl' infiniti co' par-ticolari.

E quì deesi considerare , che la cagione, per la quale le radici intercette frà 2, e 3 non sono nella medesima serie di proporzione aritmetica , nella quale sono le radici in-tercette frà 1, e 2, è solamente, perche sono nelle ipotenu-se di diversi triangoli rettangoli: e di più deesi considerare ; che in tanto le due linee rette CE , ed EG fanno ango-lo in E , per modo tale che, come si vedrà in appresso, for-mano una curva composta di linee rette determinate da punti determinati ; in quanto , che CE, ed EG sono pezzi di due diverse ipotenuse , come si puo vedere , se si pro-lunga la retta GE fin che s' incontri coll' asse FA allunga-to . Proseguiamo , ma brievemente , ad additare gl' errori di quei , che oppongono , senza studiare le dimostrazioni degl' Autori.

Viene in campo un Geometra inclinato più al calco-lare , che al ragionare , e figurandosi di poter spiegare in numeri i particolari quadrati intercetti frà AB1, ed AD4; e le particolari radici intercette frà BC1 , e DE2 , pensa trovare alcuna radice in numeri , che non corrisponda al suo quadrato , e con ciò conchiude esser falsa quella dimo-strazione dell' Autore, ch' esso non hà studiato .

A questo tale Oppositore si risponde , ch' egli non intende la natura della quantità continua , e della quantità discreta ; perche se la intendesse , conoscerebbe la seguente

pro-

proprietà della quantità continua, e della discreta, cioè: *Che tutto quello, ch' è vero in linee, si trova sempre vero in numeri, quando si puol esprimere in numeri; ma ch' all' incontro, tutto quello, che sembra vero in numeri, non si ritrova sempre vero in linee*; per la qual cosa avrebbe conosciuto, che le parallele intercette fra BC1, e DE2 prese in numeri, non possono spiegare in numeri il valore delle radici in linea, di quei quadrati in linea, i quali sono intercetti frà AB1, ed AD4; come si dimostrerà chiaramente in appresso.

Ma in vero dall' esempio delle antecedenti opposizioni bisogna dedurne la seguente importantissima massima, cioè; che tutti quei Geometri, i quali non danno volentieri il loro consenso ad alcuna dimostrazione, se non la veggono espressa in numeri, son Geometri, i quali non intendono, che cosa sia forza di dimostrazione; perchè se la intendessero, conoscerebbono, che i numeri servono bensì a spiegare sensibilmente molte di quelle cose, che la mente intende per dimostrazione, ma che non possono spiegare tutte quelle cose, che si dimostrano: Per la qual cosa, chi ha precisa necessità de' numeri, o d'altri calcoli per intendere, è segno evidente, che non intende dimostrazione, e che perciò ricorre al pratico, e al sensibile.

Queste massime da mè narrate, perche sono a' Geometri importantissime, per ciò stimo far cosa utile narrar la seguente opposizione, che da uno Amico da me molto riputato, m' è stata riferita, narrandomi, che alcuni Signori Geometri, borbottando, han fatto alle mie proposizioni: E tanto più stimo a proposito narrarla, perche in quella si vede la verità, che in tutte le massime da me narrate si contiene; ed alla pertine poi si vede, che la seguente opposizione, come tutte le altre, serve di nuova pruova alla mia proposizione.

OPPO-

OPPOSIZIONE

SI intende di provare, che se le radici delle ascisse dell' asse, intercette frà AB1, e AD4, terminassero alla linea retta CE, come vuole l' Autore; due linee di quantità diverse sarebbono mezze proporzionali frà BC1, e DE2. La difficoltà si dimostra nel seguente modo.

Suppongasi descritto il Rettilineo ABCDE, nel quale, come vuole l' Autore, AB sia 1, BC1, AD4, DE2, e tirinsi, come esso vuole, le due linee rette AC, e CE. Poi frà AB1, ed AD4 prendasi una mezza proporzional, la quale sia per esempio, AF, e tirisi la parallela FH, la quale termini alla retta CE. Poscia prolunghisi la EC dimodo, che s' incontri con la DA allungata nel punto X.

Tav. I. Fig. III.

Indi frà XB, ed XD prendasi una mezza proporzionale; questa caderà in un punto sotto il punto F, perche XB è maggiore di AB, ed XD è maggiore di AD, e perciò la mezza proporzionale averà da esser maggiore di AF. Cada dunque, per esempio, nel punto P, ed XP sia mezza proporzionale fra XB, ed XD, e tirisi la PQ, la quale termini alla retta CE.

Dico, che le due parallele diffuguali FH, e PQ sono ambedue mezze proporzionali frà BC1, e DE2, e che perciò devon' essere uguali frà esse, il che è assurdo.

DIMOSTRAZIONE.

PErchè si è presa AF mezza proporzionale frà AB, ed AD, per l' ipotesi dell' Autore, FH sarà mezza proporzionale frà BC, e DE; perche BC, FH, e DE sono in subduplicata ragione de' tre quadrati AB, AF, ed AD, i quali sono in continua proporzione trà essi.

Ma XP è ancora per costruzione mezza proporzionale frà XB, ed XD, dunque per Euclide la parallela PQ sarà mezza proporzionale frà BC, e DE; perche è come XB a BC, così XP a PQ; e come XP a PQ, così XD a DE, e perciò come BC a PQ, così PQ a DE; onde PQ, ed FH sono

ſon ambedue mezze proporzionali frà BC, e DE, il che è aſſurdo; dunque FH, la quale termina alla retta CE, non è radice di AF.

RISPOSTA.

SI riſponde per primo, che niente ripugna ad Euclide il dire, che la mezza proporzionale preſa frà le parti del lato del triangolo cada nel medeſimo punto dell' aſſe, nel quale cade la mezza proporzionale preſa frà l'unità, e l' aſciſſa dell' aſſe: E non ripugna, perchè le parallele, che terminano alle noſtre linee rette, come per eſempio, FH, TN, &c. ſendo in ſubduplicata ragione delle aſciſſe; e nell' iſteſſo tempo avendo frà eſſe la proporzione, che hanno i lati del triangolo, poſſono avere frà eſſe due diverſe proporzioni, cioè la dupla, e la ſubduplicata: ed a cagion d' eſempio, TN può eſſere a BC in ſubduplicata ragione di AB ad AT, e con tutto ciò avere a BC la proporzione di XB ad XT; e tutto ciò avviene, perche la ſubduplicata ragione, e la ragione dupla ſendo diverſe, le parallele, che ſono tutte in un tempo nel triangolo, e nell' aſſe d' una Parabola, poſſono avere frà eſſe le due ſudette diverſe proporzioni, le quali ambidue faccino cadere in un medeſimo punto dell' aſſe la mezza proporzionale frà le parti del lato del triangolo, e la radice dell'aſciſſa dell'aſſe; ecco dunque, ch' abbiamo ampiamente ſodisfatto alla obbiezione. Vogliam ora far vedere, che ogni obbiezione è cagione di nuova dimoſtrazione al noſtro aſſunto, e perciò dimoſtreremo la ſeguente propoſizione cioè.

Che le mezze proporzionali preſe in linea frà le parti dell' aſſe AB1, ed AD4; AD4, ed AF9; AF9, ed AH16: E le mezze proporzionali preſe in linea frà SB, e SD; frà MD, e MF; frà KF, e KH, che ſono parti de' lati de' triangoli, cadono a' medeſimi punti dell' aſſe; ed in pruova di ciò; Dimoſtreremo prima, che le mezze proporzionali frà le parti de'lati de'triangoli, e le mezze proporzionali fra le unità, e le aſciſſe dell'aſſe cadono nelle medeſime unità dell' aſſe:

Tav. I. Fig. IV.

asse: Poscia dimostreremo, che considerate come infinite, cadono le une, e le altre nell' istessi punti dell' asse; e per maggior chiarezza, ci avvaleremo, anche utilmente, del calcolo numerico.

Suppongasi descritto il nostro Rettilineo, nel quale AB sia 1, AD 4, AF 9, AH 16; e frà le radici, BC sia 1, DE 2, FG 3, HL 4. Suppongansi poi tirate le linee rette AC, CE, EG, e GL, e prolungata la EC in S, la GE in M, e la LG in K. In questo modo aurremo trè triangoli, SDE, MFG, KHL, ed aurremo le porzioni dell' asse, cioè AD 4, AF 9, ed AH 16.

Vogliamo ora prendere in numeri le mezze proporzionali frà le parti de' lati de' triangoli, per vedere i punti dell' asse, ne' quali cadono: Ma per ciò fare in numeri, necessaria cosa è, che ritroviamo un modo per esprimere in numeri il valore de' lati SD, MF, e KH. Esaminiamo dunque qual metodo possiamo tenere per esprimere in numeri i sudetti lati.

E' certissimo, che ne' triangoli DSE, FMG, HKL, noi non abbiamo ne lati, ne porzioni de' lati espresse in numeri, per modo tale, che potessimo per Euclide ritrovare in numeri il valore de' restanti lati; per esempio, noi non abbiamo un numero, ch' esprima il valore di SD, ne un altro, ch' esprima il valore di SB, nè un altro, ch' esprima il valore di SC, ne un altro, ch' esprima il valore di SE, per modo, che potessimo dire, come SB a SD, così SC a SE, e lo stesso avviene degl' altri triangoli. Con tutto ciò però abbiam pensato un modo, col quale possiamo spiegare in numeri il vero valore de' lati DS, FM, ed HK; il modo è il seguente.

Nel triangolo EDS, DE è 2, BD porzione del lato SD è 3, dunque DS è doppia di SB; e perciò, la differenza frà SB, ed SD dev' esser 3: ma se BD dev' esser 3, non vi è frà tutti i numeri possibili, ò fratti, o interi, altro numero, che 6, il quale possa esprimere il valore di SD; perchè solamente nel numero 6 si trova, che è come DE 2 a BC 1, così SD 6 ad SB 3, e il residuo resta 3; dunque il solo nu-

numero 6 è il valore del lato SD.

Noi poi vogliamo ridurre questo metodo ad una proprietà generale,con la quale possiamo ritrovare quei numeri, i quali soli esprimano il valore de' lati di questi triangoli, in quella guisa, ch'abbiamo trovato il numero 6, per valore del lato SD; e questa proprietà è espressa nella seguente proposizione.

PROPOSIZIONE.

COme l'unità è alla radice, che cade al punto estremo del quadrato di numero intero, e del lato del triangolo; così è la porzione dell'asse designata da' numeri impari, al lato del triangolo.

Tav. I. Fig. IV.

L'unità nel triangolo SDE è BC; ciò posto, la radice DE2 cade al punto estremo dell'asse AD4, e insieme al punto estremo del lato SD; e BD è la porzione dell' asse AD, la quale è designata dal numero impare BD, ch'è 3. Dico ora, che sarà come l'unità BC a DE2, così DB 3 a DS6; e che lo stesso avviene in ogni triangolo,ed eccone la dimostrazione.

DIMOSTRAZIONE.

NEl triangolo SDE, la DE2 è doppia di BC unità, giusto come la SD è doppia di SB. Supponiamo ora, che SD sia uguale à 6 unità, sarà come DE2 a BC1, così SD6 ad SB3,ed il residuo BD resta 3;dunque SD è necessariamente uguale à 6 unità AB.

Dall' antecedente dimostrazione si vede, che l'unico numero possibile, che compete a SD è 6; perche BD, differenza frà SB, ed SD, sendo 3 per costruzione, se SD non è 6, ed SB non è 3, SD non può esser doppia di SB.

Dell'istesso modo nel triangolo MFG, MF è ad MD, come FG a DE; mà FG è 3 unità, DE è 2, e DF è 5; dunque la differenza frà MF, ed MD dev' esser 5: mà la differenza frà MF, ed MD non può esser 5, se MD non è 10.

ed MF non è 15; dunque farà come FG 3 a DE2, così MF15 ad MD10, e lo stesso si ritrova in tutti gl'altri triangoli fino all'infinito. Dunque come l'unità è alla radice, che cade al punto estremo del quadrato di numero intero, e del lato del triangolo, così è la porzione dell'asse designata da' numeri impari al lato del triangolo, ch'è ciò si dovea dimostrare.

Proseguiamo ora à suppotare i lati degl'altri triangoli, per far conoscere, che la proprietà và all'infinito. Nel triangolo MFG, la radice di FG è 3, la DF porzione dell'asse AF designata dal numero impare è 5; dunque farà, per la proprietà da noi ritrovata, come l'unità ad FG3, così MD 10, ad MF15; e perciò 15 è il solo numero, ch'esprime il valore del lato MF.

Questo di nuovo si vede chiaramente per Euclide; perchè è come FG3 a DE2, così MF15 ad MD10, e perciò DF resta 5: donde chiaramente si vede, che il numero, che solo può esprimere il lato MF è 15, perche solamente nel numero 15, il lato DF resta 5. Dell'istesso modo nel triangolo KHL, la radice di HL è 4, ed FH è 7; dunque farà come l'unità ad HL4, così HF7 a HK28: e per Euclide farà, come HL4 ad FG3, così KH28 a KF21, onde il residuo FH resta 7. Dunque solamente il numero 28 è quello, ch'esprime il valore del lato KH, e lo stesso si ritrova fino all'infinito.

Ritrovato già in numeri il valore de' lati de' triangoli, ed il valore delle parti di essi; riman ora a ritrovare le mezze proporzionali frà le parti de' lati de' triangoli, per vedere i punti dell'asse, ne' quali cadono.

Nel lato SD del triangolo SDE; SB è 3, ed SD è 6, dunque il prodotto degl'estremi è 18, dunque la mezza proporzionale frà SB, ed SD è radice 18: ma se è radice 18, la mezza proporzionale cade frà SN uguale a 4 unità, ed SO uguale a 5 unità, cioè frà il punto 2, e 3 dell'asse AD.

Prendiam ora la mezza proporzionale frà MD, ed MF; nel lato MF, MD è 10, ed MF è 15, dunque il prodotto degl'estremi è 150, e la mezza proporzionale frà

MD,

MD, ed MF è radice 150, dunque cade frà il punto 12, e 13 di MF, perche la radice di 150 è fra 12, e 13: ma se cade frà 12, e 13 di MF, cade frà AP, ed AQ dell' asse; perche tolte da MF 15 trè unità, MP resta 12, ed MQ resta 13: ma se la mezza proporzionale cade frà MP ed MQ, cade frà il 6, e 7 punto dell' asse AF.

Prendiam ora la mezza proporzionale frà KF, e KH; KH è 28, e KF è 21, dunque il prodotto degl' estremi è 588, e la mezza proporzionale è radice 588, la qual'è frà 24, e 25: ma se è frà 24, e 25, cade frà KT, e KR, perche TH è 4; e se cade frà KT, e KR, cade frà il punto 12, e 13 dell' asse AH.

Abbiamo dunque dimostrato, che le mezze proporzionali frà le parti de' lati de' triangoli cadono frà i limiti di N, e O; e frà quei di P; e Q; e frà quei di T, ed R dell' asse, ciò che vale à dire, che cadono nelle unità NO, PQ, e TR, e così di tutte le altre: Dimostreremo ora, che le terze proporzionali prese frà AB, ed AD; frà AD, ed AF; frà AF, ed AH, cadono nelle medesime unità NO, PQ, e TR, ed eccone la pruova.

Perchè i quadrati intercetti frà AB1, ed AD4; frà AD4, ed AF9 s' eccedono l' un l' altro nella medesima proporzione, nella quale s' eccedono i quadrati di numero intero AB1, AD4, ed AF9; la mezza proporzionale frà AB1, ed AD4, la quale in numeri sarebbe 2, in linea non si ritrova nel punto 2. dell' asse AD; perchè se si ritrovasse nel punto 2. dell' asse AD, i quadrati intercetti frà AB, ed AD; frà AD, ed AF, non si eccederebbero frà loro nella medesima proporzione de' numeri impari, nella quale s' eccedono i quadrati AB1, AD4, ed AF9.

La mezza proporzionale poi frà AB1. ed AD4 ne meno può esser l'ascissa AO tripla di AB; perchè se fusse AO, non solo i quadrati intercetti frà AB, ed AD non s' eccederebbero secondo l' ordine de' numeri impari; ma la radice DE2 caderebbe in un punto sotto il punto D, come per esempio in Y; dunque la mezza proporzionale frà AB1, ed AD4 cade in un punto intercetto frà AN, ed AO.

Que-

Questa verità si vede più sensibilmente, supponendo, come hà supposto Galileo, un grave, il quale cadendo per l'asse AF, s' acceleri in ogni punto dell'asse, ed ecco come.

Il grave in un momento di tempo precorre la BD tripla dell'unità AB, e s' accelera in ogni punto della BD: mà se AN doppia di AB fusse 2, e fusse mezza proporzionale frà AB, ed AD; tanto in numero, quanto in linea, il numero 2 sarebbe mezza proporzionale frà 1, e 4, e frà AB1, ed AD4, e perciò AN in ragion di linea sarebbe 2.

Ma se fusse così, il grave andrebbe di moto equabile, e non di moto accelerato; perchè il grave, che in un momento di tempo descrive la BD tripla di AB, in un terzo poi di momento di tempo descriverebbe l' unità AN, in un altro terzo l' unità NO, e nell' altro terzo l' unità OD, e perciò andrebbe di moto equabile: Adunque AN non è 2, e se non è 2, non è mezza proporzionale in numero frà AB, ed AD, e perciò la mezza proporzionale frà AB, ed AD cade in un punto intercetto frà N, ed O. Dell' istesso modo si dimostra, che la mezza proporzionale fra AD, ed AF cade in un punto intercetto frà P, e Q; e la mezza proporzionale frà AF, ed AH cade in un punto intercetto frà T, ed R.

Potrebbe però avvenire, che l'Avversario dicesse, che se AN non è mezza proporzionale numero frà AB1, ed AD4, è però mezza proporzionale linea frà AB, ed AD. A questo si risponde, che tutte le intercette frà AB, ed AD sono irrazionali, come dimostreremo in appresso, e che per ciò non si puol sapere in qual punto della NO cada la mezza proporzionale frà AB, ed AD: mà con tutto ciò, ancorche si concedesse, che AN, doppia di AB, fusse mezza proporzionale linea frà AB, ed AD; sempre la mezza proporzionale frà SB, ed SD; e la mezza proporzionale frà AB, ed AD cadono nella medesima unità NO.

Noi dunque dimostreremo quì in appresso prima, che, se si suppone, che la mezza proporzionale frà AB, ed AD cada in un punto intercetto frà AN, ed AO, nell'infinito le mezze proporzionali frà AB, ed AD, e le mezze proporzionali frà SB, ed SD cadono a' medesimi punti dell'asse.

Po-

Poscia dimostreremo, che se si suppone, che AN sia mezza proporzionale in linea frà AB, ed AD, anco nell'infinito le mezze proporzionali frà SB, ed SD, e frà AB, ed AD cadono a' medesimi punti dell' asse, e per ciò dimostrare; Supponiamo, che la mezza proporzionale fra AB, ed AD cada in un punto intercetto frà AN, ed AO.

Suppongasi dunque per l' Avversario, che KM sia mezza proporzionale fra KB, KD; e che AH sia mezza proporzionale frà AB, AD, ciò supposto; Dico, che nell' infinito le mezze proporzionali frà kB, e le porzioni intercette frà kB, e KD; e le mezze proporzionali frà AB, e le ascisse di AD cadono a' medesimi punti dell' asse, ed eccone la pruova.

Tav. I. Fig. V.

Perche, per supposizione dell' Avversario, KM è mezza proporzionale frà KB, e KD; ed AH è mezza proporzionale frà AB, ed AD: prendasi frà KB, e KM una mezza proporzionale, e sia per esempio KP; e poi frà AB, ed AH prendasi un altra mezza proporzionale e sia, AR; indi prendasi una mezza proporzionale frà KB, e KP, e sia la linea segnata K9; e poi prendasi un altra mezza proporzionale frà AB, ed AR, e sia, per esempio, la linea segnata A7; e lo stesso facciasi fino all' infinito. Si dimostra, che nell' infinito le mezze proporzionali prese frà KB, e le porzioni di KD; e le mezze proporzionali frà AB, e le ascisse di AD cadono nelli medesimi punti dell' asse, ed eccone la pruova.

Noi abbiam preso frà KB, e KD la mezza proporzionale KM; frà la medesima KB, e KM la mezza proporzionale KP; e frà KB, e KP la mezza proporzionale K9. E dall' altra parte abbiam preso frà AB, ed AD la mezza proporzionale AH; frà la medesima AB, ed AH la mezza proporzionale AR; e fra AB, ed AR la mezza proporzionale A7; ed abbiamo supposto farsi questo progresso fino all' infinito: Dunque le mezze proporzionali KP, e K9; AR, ed A7, e tutte le altre fino all' infinito, sono mezze proporzionali di mezze proporzionali frà due quantità, che sono sempre le medesime, cioè KB, ed AB;

e ter-

e terze proporzionali, che sono mezze proporzionali, le quali divengono terze proporzionali; come per esempio, KM mezza proporzionale frà KB, e KD, ed indi terza proporzionale di KB, e KP; ed AH mezza proporzionale frà AB, ed AD; e poi terza proporzionale di AB, e di AR, e lo stesso avviene di tutte le altre.

Ma se è così, le mezze proporzionali KM, KP, e K9; e le mezze proporzionali AH, AR, A7 caderanno sempre ne' punti dell' asse, che saranno l'uno all' altro più vicini, quanto più le mezze, e le terze proporzionali diverranno minori: cioè il punto R sarà più vicino al punto P, che 'l punto H al punto M; il punto P più vicino al punto R, che 'l punto 9 al punto 7; perchè se i primi termini delle progressioni, son sempre gli stessi, e le mezze proporzionali sono mezze proporzionali di mezze proporzionali: le terze, e le mezze proporzionali divengono sempre minori, e con ciò le differenze, nelle quali cadono le mezze proporzionali nell' asse, devon sempre diminuirsi.

Ma se è così, prendendosi sempre fino all' infinito le mezze delle mezze proporzionali, e ponendole in luogo di terze proporzionali, si giungerà a prender la terza proporzionale frà KB, ed una quantità maggiore di KB, per una quantità così minima, che si reputa indivisibile: e si giungerà a prendere la mezza proporzionale frà AB, ed una quantità maggiore di AB per una quantità così minima, che si reputa indivisibile, come per esempio, la mezza proporzionale fra KB, e KD è KM; e per l' Avversario la mezza proporzionale fra AB, ed AD è AH: poscia la mezza proporzionale frà KB, e KM è KP; e la mezza proporzionale frà AB, ed AH è AR: ed alla perfine, per che KB, ed AB son sempre le istesse, e le terze proporzionali sempre l'una minore dell' altra; la mezza proporzionale frà KB, e K9 sarà K7, e la mezza proporzionale fra AB, ed A7 sarà AX, la mezza proporzionale frà KB, e K7 sarà KX, e la mezza proporzionale frà AB, ed AX sarà AT, fino à tanto, che la mezza proporzionale frà KB, e KX, e la mezza proporzionale frà AB, ed AT cadranno

in

in un medesimo punto; perche la differenza frà i punti, ne' quali cadono le mezze proporzionali, è un punto così insensibile, e così minimo, che non si può concepire diverso dal punto T, e per ciò si reputa indivisibile. Abbiamo dunque dimostrato, che se si suppone, che le mezze proporzionali cadono in un punto intercetto della medesima unità, nell'infinito poi cadono in un medesimo punto.

Dimostreremo ora dell'istesso modo, che se si suppone, che la mezza proporzionale frà AB, ed AD cada in una ascissa doppia dell' unità AB, come è AN nella figura IV, pure nell' infinito le mezze proporzionali cadono ne' medesimi punti dell' asse.

Suppongasi, che BR sia uguale all' unità AB, ed RM ancora uguale ad AB; e suppongasi come prima, che KP sia mezza proporzionale frà KB, e KD; e che AR doppia di AB sia mezza proporzionale frà AB, ed AD. Indi prendasi la mezza proporzionale frà KB, e KP, la quale sia per esempio K9; poi la mezza proporzionale frà KB, e K9, la quale sia KX, e lo stesso facciasi fino all' infinito. Poscia prendasi la mezza proporzionale frà AB, ed AR, e sia per esempio A7, e la mezza proporzionale frà AB, ed A7, e sia AT. La distanza frà il punto 9, ed il punto 7 è minore della distanza frà il punto P, ed il punto R; perche nelle serie delle continue proporzionali, i primi termini KB, ed AB sono l'istessi, e le terze proporzionali K9, ed AT sono minori delle terze proporzionali KP, ed AR, dunque le differenze frà le terze proporzionali si diminuiscono sempre fino all' infinito.

Tav. I. Fig. V.

Ma se le differenze frà le terze proporzionali si diminuiscono sempre, nell'infinito svaniscono in tutto, e perciò, se di nuovo si prende la mezza proporzionale frà KB, e KX, e frà AB, ed AT, e lo stesso si faccia fino all'infinito, la mezza proporzionale frà KB, e KX, e la mezza proporzionale frà AB, ed AT cadranno in un punto dell' asse, che si reputa indivisibile: Dunque, se dall' Avversario si vuole, che AR sia mezza proporzionale frà AB, ed AD, e che KP sia mezza proporzionale frà KB, e KD, si ritrova, che nell'

infinito le mezze proporzionali prese frà AB, ed una minima ascissa dell'asse, e frà KB, ed una porzione di KD, cadono in un medesimo punto dell' asse.

Ma se una mezza proporzionale frà KB, ed una porzione di KD, intercetta frà KB, e KD; ed una mezza proporzionale frà AB, ed una ascissa di AD, cadono in un medesimo punto dell' asse; tutte le infinite mezze proporzionali frà KB, e le porzioni intercette frà KB, e KD, e le mezze proporzionali prese frà AB, e le ascisse di AD, cadono ne' medesimi punti dell'asse: perche è legge stabilita frà Geometri, che quando le differenze si diminuiscono sempre, nell' infinito svaniscono in tutto, e se svaniscono in tutto, le differenze, che si ritrovano nelle proprietà particolari, non possono ripugnare alle proprietà, che si ritrovano nell' infinito, a cagion che li particolari son nell' infinito compresi, ch' è ciò si dovea dimostrare.

Questa dimostrazione poi, deve anco piacere a' signori moderni Geometri settatori del calcolo differenziale; perche, mentre dico, che le differenze frà i punti, a' quali cadono le mezze proporzionali, si diminuiscono fino all' infinito, da ciò n' avviene ancora, che le differenze divengono minori di ogni data quantità, qual' condizione è quella, ch'essi vogliono ne'loro calcoli, acciò sia ricevuta per vera una proprietà geometrica.

Abbiamo dunque dimostrato prima, che le mezze proporzionali prese frà KB, e KD, e le mezze proporzionali prese frà AB, ed AD, considerate come particolari, cadono ne' punti di una medesima unità dell' asse; poscia abbiamo dimostrato, che nell' infinito le mezze proporzionali cadono a' medesimi punti dell' asse, ch' è ciò si dovea dimostrare.

Dopò l'antecedente dimostrazione, di nuovo si vede chiaramente, che le linee rette CE, ed EG, e tutte le altre, sono il vero luogo delle radici dell' ascisse dell' asse, ed eccone in brieve la dimostrazione.

Perchè habbiamo dimostrato, che tutte le mezze proporzionali prese frà KB, e le porzioni intercette frà KB, e

KB,

KD, e le mezze proporzionali prese frà AB, e le ascisse di AD cadono a' medesimi punti dell' asse AD: le parallele tirate da' punti, dove cadono le mezze proporzionali, termineranno nella retta CE, come per esempio, se la mezza proporzionale frà KB, e KX, è KΓ; e la mezza proporzionale frà AB, ed AX, è AT; la parallela TV caderà nella retta CE, perchè è come KB a KC, così KΓ a TV; abbiamo poi dimostrato in tutte le antecedenti proposizioni, che la parellela TV è radice di AT, dunque la rettta CE è il luogo delle radici delle ascisse dell' asse, e nel medesimo tempo è una parallela compresa nel triangolo KDE. Ecco dunque, che l' obbiezione dell' Avversario, hà servito, come tutte le altre, di nuova dimostrazione al nostro assunto, la quale dimostrazione è appunto la quarta.

CONSIDERAZIONE I.

Quello però, ch' è degno di considerazione si è, che questi oppositori, i quali susurravano co' i poco intesi di Geometria queste sì fatte opposizioni, non s' accorgevano, che insieme con la mia novella Invenzione, distruggevano anco la Parabola Apolloniana, e facevano un fascio di tutta la Geometria; perchè alcerto il medesimo assurdo, che essi opponevano al mio Rettilineo, si ritrova nella Parabola Apolloniana descritta come una curva, ed eccone in brieve la pruova.

Suppongasi descritta la Parabola Apolloniana ABCDEI, il di cui parametro, o sia unità, sia AB, e tirisi l' applicata DE: poi frà AB, ed AD prendasi una mezza proporzionale, quale sia, per esempio, AH, e dal punto H tirisi l' applicata HI, la quale termini nella curva: Indi dal punto E al punto C tirisi la linea retta EC, e questa prolunghisi finche s' incontri coll' asse DA allungato, come per esempio, nel punto G; poscia frà GB, e GD prendasi una mezza proporzionale, questa per l' Avversario caderà ancora sotto il punto H, come per esempio, nel punto M; perchè l' Avversario è quello, il quale nega, che la mezza pro-

Tav. I. Fig. VI.

porzionale frà le parti del lato del triangolo, e la mezza proporzionale frà 'l paramerro e l' asse della Parabola, possono cadere nel medesimo punto del asse: è manifesto dunque, che dall' opposizione dell' Avversario ne risulterebbe, ch' anco nella Parabola Apolloniana, due diverse parallele, cioè MN, ed HI, sarebbero mezze frà due medesime quantità, cioè BC, e DE; ond' è che affaticandosi di distruggere la mia Proposizione, distruggevano ancora la Parabola Apolloniana. Ma per togliere, per quanto si può, a quei oppositori, che non vogliono studiare le altrui dimostrazioni, il modo di cercar vani, ed inutili assurdi, faremo la seguente considerazione.

CONSIDERAZIONE II.

Tav. I. Fig. IV.

Egli è da considerarsi, che tutti i quadrati intercetti frà AB1, ed AD4, frà AD4, ed AF9 &c. sono irrazionali; e che tutte le radici intercette frà BC1, e DE2, frà DE2, e FG3 &c. sono irrazionali; ed eccone la pruova.

I quadrati intercetti frà AB1, ed AD4 considerati in particolare s'eccedono l'un l'altro secondo l'ordine de' numeri impari, a cagione che, se si considera un grave, che cada a perpendicolo, questo s' accelera in ogni punto dell' asse, appunto come abbiam detto nell' antecedente dimostrazione; ma se si accelera in ogni punto dell'asse, noi non possiamo, alle varie porzioni intercette frà AB, ed AD assegnare un numero, il quale esprima in ogni punto dell'asse il grado d' eccelerazione, e con ciò il valore de quadrati; come per esempio, un numero, che determini la lunghezza della linea, la quale esprima il quadrato 2, in quella guisa, che AD esprime il quadrato 4: per la qual cosa non potendosi avere in numeri il valore de' quadrati frà AB1, ed AD4, ne meno si puole avere in numeri il valore delle radici intercette frà BC1, e DE2; e perciò, tanto i quadrati intercetti frà AB1, ed AD4, quanto le radici intercette frà BC1, e DE2 sono irrazionali: Lo stesso si dimostra de' quadrati intercetti frà AD4, ed AF9, e delle radici intercette frà DE2, ed FG3 &c.

Ora

Ora dopò questo è certissimo, ch' errarebbe ogni oppositore, il quale volesse esprimere in numeri il valore di un quadrato intercetto frà AB1, ed AD4, o il valore di una radice intercetta frà BC1, e DE2; ma perchè non mancheranno di quelli, i quali vedendo, che noi abbiamo trovato in numeri il valore di SB, ed SD, porzioni del lato del triangolo SDE, si lusingheranno di poter essi ancora trovare in numeri il valore delle radici intercette frà BC1, e DE2, e de' quadrati intercetti frà AB1, ed AD4: perciò vogliamo, col esempio della seguente opposizione, far conoscere, che le radici intercette frà BC1, e DE2, considerate come radici, non si possono esprimere in numeri, quantunque le parallele, ragguagliate all' unità, ed a' lati de' triangoli, si possano esprimere in numeri.

Fingiamo, che un Geometra, volendo ritrovare una linea, la quale esprimesse ancora in numeri la radice del quadrato AN, doppio dell' unità AB, dicesse per esempio, AN è 2, SB è 3, dunque BN è 1, ed SN è 4, ciò fatto, facesse la seguente analogia, cioè, come SB3 a BC1, così SN4 alla parallela segnata N8, cioè ad $1\frac{1}{3}$, e dicesse, dunque $1\frac{1}{3}$ è radice in numeri di AN; ma $1\frac{1}{3}$ multiplicato in se stesso fà $1\frac{7}{9}$, dunque il quadrato AN è $1\frac{7}{9}$.

A questo però si rispōde per primo, che questa opposizione niente ripugnarebbe alla mia proposizione; perchè quantunque AN sia in linea doppia di AB unità, non perciò si può dire, ch'è 2 in numeri, mentre io hò dimostrato poc'anzi, che il quadrato di $\sqrt{2}$, se vi fusse, cadrebbe sotto il punto N, in un punto intercetto frà N, ed O; dalla qual cosa se ne deduce, che la parallela segnata N8 potrebbe esser radice di AN, ed all'ora la radice di 2 caderebbe giustamente in un punto sotto il punto N, e terminerebbe nella retta CE; perchè la radice del quadrato 2 sendo anco in numeri giustamente maggiore, per una minima quantità, del quadrato di $1\frac{7}{9}$, se la radice del quadrato 2 termina giusto sotto il pun-

to

to N, termina per necessità nella linea retta CE; ed ecco, che l'oppositore con questa obbiezione verrebbe à fare un altra dimostrazione alla mia Proposizione.

Ma con tutto ciò io voglio provare, che i numeri, che si ritrovano, per lo mezzo della soluzione de' triangoli, nelle parallele, le quali s' interpongono frà BC1, e DE2, quantunque esprimessero il valore della lunghezza delle parallele, secondo la proporzione, ch'hanno all'unità BC, a riguardo de' lati de' triangoli, non esprimono però il valore delle radici de'quadrati intercetti frà AB1, ed AD4; e che con tutto ciò, le parallele frà BC1, e DE2 sono in linea le vere radici de' quadrati delle ascisse dell' asse, in quella guisa, che noi abbiamo dimostrato.

Si dimostra dunque, che la parallela N8 considerata in numeri per $1\frac{1}{3}$ mostra bensì la proporzione, ch' essa have a BC1 a riguardo de' lati SB3, e SN4; ma con tutto ciò, il numero $1\frac{1}{3}$ non esprime il valore della radice in linea del quadrato AN in linea; ed eccone la pruova.

Noi abbiamo dimostrato, che i quadrati intercetti frà AB1, ed AD4 s' eccedono l' un l' altro secondo l' ordine de' numeri impari, e che perciò non possiamo sapere qual numero esprima il valore del quadrato AN considerato in linea: Ma se è così, non perche SN è 4 ne avviene, che nel triangolo SDE, la linea AN doppia di AB sia uguale a quadrato 2 in numeri, ne a qualunque altro numero, che si voglia. Dimostreremo questo più ampiamente, e più distintamente per la via negativa.

Se poi l' oppositore vuole, che i numeri ritrovati per lo mezzo della soluzione de' triangoli diano il valore delle radici intercette frà BC1, e DE2, si potranno alcerto avere ancora tutte le radici de' quadrati intercetti frà AB1, ed AD4; perchè se si suppone la BD divisa in punti infiniti, si potranno risolvere tanti triangoli intercetti frà SBC, e SDE, quanti sono gl' infiniti punti del-

della BD. Se poi vuole, che le radici, e i quadrati si possano esprimere in numeri; ne' quadrati intercetti frà AB1, ed AD4 vi sarà un quadrato, che si potrà esprimere col numero 2, ed un quadrato, che si potrà esprimere col numero 3; perchè se i quadrati intercetti frà AB1, ed AD4 si possono esprimere in numeri, i quadrati intercetti frà AB1, ed AD4, sendo infiniti, frà essi vi saranno tutti gl' infiniti numeri, che s' interpongono frà 1, e 4, e perciò vi sarà il quadrato 2, e il quadrato 3; ma se v' è il quadrato 2, e il quadrato 3, frà le infinite radici intercette frà BC1, e DE2, vi sarà la radice del quadrato 2, e quella del quadrato 3.

Dunque se, per lo mezzo della risoluzione de' triangoli, si puol avere in numeri il valore delle radici intercette frà BC1, e DE2, se aurà ancora in numeri il valore della radice del quadrato 2, e quella del quadrato 3.

Ma frà le infinite parallele intercette frà BC1, e DE2 non vi puol essere alcuna frazzione, la quale espressa in nuri, e moltiplicata in se medesima può produrre il numero 2, ed il numero 3; perchè se le parallele intercette frà BC1, e DE2 s' esprimono in numeri, son tutte unità mischiate di frazzioni, a cagion che, son tutte maggiori di BC1, e minori di DE2; e se sono unità mischiate di frazzioni, moltiplicate in lor medesime mai possono produrre un numero intero; dunque niuna delle infinite parallele intercette frà BC1, e DE2 puol' esprimere in numeri il valore del quadrato 2, nè il valore del quadrato 3.

Ma noi abbiamo dimostrato, che se i quadrati infiniti intercetti frà AB1, ed AD4 si possono esprimere in numeri, necessariamente frà essi v' è il quadrato 2, ed il quadrato 3; ed ora abbiamo dimostrato, che niuna delle infinite parallele intercette fra BC1, e DE2 può esprimere in numeri la radice del quadrato 2, ne quella del quadrato 3; Dunque i numeri, i quali, per lo mezzo della soluzione de' triangoli, si ritrova, che competono alle parallele intercette frà BC1, e DE2 considerate come lati de' triangoli, non esprimono in numeri il valore delle radici de' qua-

dra-

drati intercetti frà AB1, ed AD4; e se non esprimono il valore de'quadrati, esprimono solamente la lunghezza delle parallele, a rispetto de' lati de' triangoli, ch' è ciò si dovea dimostrare.

E per dare un esempio della nostra antecedente dimostrazione; suppongasi per l' Avversario, che AN sia 2: se è così, 1 $\frac{1}{3}$ non è radice di quadrato 2. Suppongasi poi, che il quadrato 2 sia AV, e suppongasi altresì, che AV sia qualunque numero intercetto frà 2, e 3: In questo caso se si risolve il triangolo SVX, la parallela VX sarà una unità mischiata d' una frazzione, e perciò non potrà mai dare il quadrato 2; e lo stesso si troverà in ogn' altro punto dell' asse AD, al quale si voglia, che termini il quadrato 2, per modo che, niuna parallela darà il quadrato 2: mà se niuna parallela darà il quadato 2, frà le parallele intercette frà BC1, e DE2, non si ritroveranno in numeri le radici de' quadrati intercetti frà 1, e 4; e perciò i numeri, ch' esprimono la lunghezza delle parallele, non esprimono in numeri il valore delle radici infinite intercette frà BC1, e DE2; ed ecco dimostrato anche coll' esempio il nostro assunto.

Tav. I. Fig. IV.

Ne quello, che abbiamo dimostrato dee recar meraviglia, se si considera, che la ragione dupla, tripla, ed altre semplici son diverse dalla duplicata, triplicata, o altre composte ragioni: dalla qual cosa n' avviene, che quel numero, che compete a una linea, considerata a rispetto di un' altra in proporzione semplice, non compete a quella medesima linea, considerata a rispetto di un' altra, in subduplicata ragione di due quadrati; e per esempio, 1 $\frac{1}{3}$ può esprimere bensì la proporzione, che la parallela N8 ave a BC nella ragione de' lati NS, e BS, ma non esprime la subduplicata ragione di N8, e BC, a riguardo di NA, e BA quadrati.

Allo incontro però, le parallele BC1, DE2, e FG3 moltiplicate in lor medesime, tanto in linee, quanto in numeri

meri danno i quadrati AB, AN, ed AF, è ciò avviene; perchè i numeri interi moltiplicati in lor medesimi danno i numeri interi, a' quali possono perfettamente corrispondere le linee, ciò che non avviene nelle radici mischiate di frazzioni, come son le intercette frà BC1, e DE2.

Ecco dunque, che abbiam dimostrato, che le parallele intercette frà BC1, e DE2 son radici in linea, ma non son radici in numero, quantunque per lo mezzo de' triangoli si possa spiegare in numeri la proporzione, ch' hanno all' unità, a riguardo de' lati de' triangoli.

Io sò però, che a queste sì fatte dimostrazioni ripugnerà l' animo di quei Geometri, i quali, niente attendendo alle dimostrazioni, sono attaccati solamente al numero, ed al sensibile; imperocche diranno frà lor medesimi, noi siam certi per il triangolo SN8, che $1\frac{1}{3}$ è il valore della parallela N8; e siam certi ancora, che la parallela N8 è radice di AN, dunque come può egli avvenire, che $1\frac{1}{3}$ non sia radice di AN in numero, e che la linea signata N8 sia radice in linea di AN!

A' questi se li risponde, che la subduplicata ragione è diversa dalla semplice, e tutto il di più, che abbiamo risposto poc' anzi; e dipiù se li dice, che i numeri esprimono la quantità delle linee secondo l'ipotesi della legitima proporzione, che si siegue, ma che non possono esprimere il valore di quei quadrati in numero, che sono quadrati solamente in linea, e non in numero.

Se poi qualche male accorto Geometra non fusse ancora, dopò le nostre dimostrazioni, di queste sì fatte verità capace, a noi nulla importa; perchè, sicome abbiam detto poc' anzi, se volesse questo tale dire, che $1\frac{1}{3}$ esprime il valore della radice N8, ciò non solo non ripugna alla nostra dimostrazione, anzi la conferma: Si priega però questo oppositore, che pretende di spiegare in numeri il valore delle radici intercette frà 1, e 2, e di ritrovare in nu-

meri il valore delli quadrati intercetti frà 1, e 4, che mi trovi esso nell' asse AD un punto, che sia termine del quadrato 2. in numeri, e che mi trovi la radice in numero del sudetto quadrato; perchè se non ritrova questo, non puo per la via della soluzione de' triangoli ritrovare in numeri il valore delle radici intercette frà BC1, e DE2, e frà i quadrati AB1, ed AD4, quantunque ritrovi in numeri il valore delle parallele ragguagliate a' lati de' triangoli.

Da tutto quello dunque, che si è detto, è manifesto, che i quadrati intercetti frà AB, ed AD, frà AD, ed AF &c., e le radici intercette frà BC1, e DE2, frà DE2, ed FG3 &c. sono irrazionali, e che solamente ne' numeri 4, 9, e 16, e in tutti gl' altri quadrati, ch' hanno radici di numero intero, si può avere espresso in numeri il valore de quadrati, e il valore de' lati de' triangoli, come per esempio, di AD, e di SD; di AF, e di MF &c. Continuiamo ora a dimostrare in altri modi, come abbiam promesso, che la Paradola Apolloniana non hà le proprietà, che se le assegnano.

PROPOSIZIONE.

LA Parabola Apolloniana non hà le proprietà, che da Apollonio se l' assegnano, ed il suo perimetro non è una curva continuata.

SUPPOSIZIONE, E COSTRUZIONE.

SUppógasi fatto come prima il nostro Rettilineo ABCDE, nel quale AB sia 1, BC 1, DE2, AD4, e tirate le nostre linee rette AC, e CE: Indi descrivasi la Parabola Apolloniana, la quale dovrà passare per i punti A, C, ed E, perchè BC unità è radice di AB unità, e perciò A è vertice, e DE2 è radice di AD4; ciò fatto. Dico, che la curva, o non passa per i punti C, ed E, o non è una curva continuata, da' punti della quale si possano tirare le ordinate all' asse, le quali siano radici delle ascisse del medesimo asse.

Tav. II. Fig. VII.

DI-

DIMOSTRAZIONE.

SUpponganſi tirate infinite ordinate da' punti dell' aſſe AD; queſte per Apollonio termineranno tutte fuori delle due linee rette AC, e CE, perche la Parabola non può toccare le due linee rette AC, e CE in altri punti, che ne' punti A, C, ed E; ma ſe terminano fuori, ſupponiamo, che ſiano in proporzione aritmetica, come ſono ſopra l' unità BC le ordinate ſegnate F1, H2, L5, e ſotto l' unità le ordinate ſegnate O3, Q4, S7; ed allora la curva, che paſſa per i punti ſegnati co' numeri 1, 2, e 5, non può paſſare per il punto C, perchè ſe dal punto A ſi tira una linea per i punti eſtremi delle parallele F1, H2, L5, che ſono in proporzione aritmetica, queſta ſarà la linea retta AN. Dell' iſteſſo modo, ſe per i punti eſtremi delle rette BC, O3, Q4, ed S7, che ſono in proporzione aritmetica, ſi tira una linea, queſta ſarà la retta CV; dunque, ſe le applicate ſono in proporzione aritmetica, non ſi può deſcrivere una curva, che paſſi per i punti G, ed E.

Suppongaſi poi, che le applicate s' eccedano fra eſſe con qualunque altra differenza, diverſa dalla proporzione aritmetica, come ſono, per eſempio, FG HI, LM, BC, OP, QR, ST &c. In queſto caſo la curva non ſarà una curva continuata, perchè farà angolo curvilineo nel punto C; ed eccone la prova.

Tutte le parallele contenute nel triangolo rettangolo ABC ſono in proporzione aritmetica frà eſſe; e tutte le parallele intercette frà BC, e DE ſono in proporzione aritmetica fra eſſe, (ma ſecondo la ſerie delle parallele contenute nel triangolo KDE), dunque le linee AC, e CE fanno angolo nel punto C, perchè ſon lati de' diverſi triangoli: Ma ſe è così, anche le porzioni della curva, cioè AGC, CPE faranno angolo nel punto C, perchè non potendo la curva toccare le due linee rette AC, e CE in altri punti, che ne' punti A, C, ed E, ſe le linee rette AC, CE fanno angolo nel punto C, le porzioni delle curve AGC, CPE, ſendo ſotteſe dalle due linee, che fanno angolo nel punto C, faranno anch' eſſe

effe nel punto C l'angolo curvilineo AGCP; dunque la curva neceffariamente deve far'angolo curvilineo nel punto C.

Oltracciò le parallele intercette fra FG, e BC giunte nel punto M dovranno diminuirfi, acciò la curva poffa paffare per il punto C; perchè fe non s'eccedono l'un l'altra in proporzione aritmetica, s'eccederanno con differenze maggiori della proporzione aritmetica, e perciò, fe fra LM, e BC non fi diminuifcono tanto le lunghezze delle applicate, quanto fi fono accrefciute da A in M, la curva mai potrà andare nel punto C, dunque la curva farà angolo curvilineo nel punto C: dell'ifteffo modo, fe fi prolunga l'affe AD, fin che venga uguale a 9 unità AB, la curva farà angolo nel punto E, e perciò il perimetro della Parabola non è una curva continuata.

Che non fi poffano pòi tirare, da' punti del perimetro della Parabola, applicate all'affe, le quali fiano coftantemente radici delle afciffe del medefimo affe, eccone la prova.

Per dimoftrare ciò però, fuppongafi per l'Avverfario, che le applicate FG, HI, LM, BC, OP, QR, ed ST fiano radici delle afciffe dell'affe; indi fuppongafi per i punti intercetti frà 1, e G, frà 2, e I, frà 5, e M, ed il punto C; e poi per i punti intercetti frà 3, e P, frà 4, e R, fra 7, e T paffare altre curve. In quefto cafo le radici delle afciffe dell'affe potranno terminare in ogn'una delle fudette curve intercette frà i fudetti punti, e ad ogn'una delle fudette curve fi potranno affegnare le medefime proprietà; dunque da' punti G, I, M, P, R, e T non fi poffono tirare le applicate all'affe, le quali fiano radici delle afciffe dell'affe, ch' è ciò fi dovea dimoftrare. Da tutto cio fi deduce, che la curva, che nafce dalla fezzione del cono, non hà proprietà conofciute.

Dopò le antecedenti cinque evidentiffie dimoftrazioni, dovrei ormai dubbitare d'annojare il Lettore, aggiungendone altre di più; ma perche hò cofiderato, che nelle antecedenti dimoftrazioni io fuppongo, che il Lettore intenda il Metodo degl' indivifibili, hò ftimato a propofito dimo-

ftra-

ftrare, e per Euclide, e per la via positiva, e per la negativa ancora la mia Proposizione, e perciò hò posto le seguenti due altre dimostrazioni.

LEMMA.

Se sia la linea retta AB divisa in cinque parti uguali; cioè, AC, CD, DE, EF, FB; e sian descritti successivamente i cerchi co' diametri di AB5, CB4, DB3, EB2: Ed oltr' a ciò da' punti C, ed F, punti estremi delle unità AC, ed FB, siano alzate le perpendicolari CG, ed FO fino alle periferie de' cerchi AGB, EOB, e per i punti G, ed O sia tirata la linea retta GO. Dico, che se da' punti D, ed E, punti estremi delle unità CD, e DE, s'alzano le perpendicolari DM, ed EN fino alla linea retta GO, i cerchi BYC, e BID segano la linea retta GO ne' punti M, e N, punti estremi delle perpendicolari DM, ed EN.

Tav. II. Fig. VIII.

COSTRUZIONE, E DIMOSTRAZIONE.

Prolunghinsi le GO, e CB, sin che s' incontrino nel punto P. Perche abbiamo divisa la BA nelle cinque parti uguali, cioè AC, CD, DE, EF, ed FB, ed abbiamo presa la FP comune, le PF, PE, PD, PC sono in proporzione aritmetica frà esse.

Ma per la quarta del sesto d' Euclide, è come PF ad FO, così PE, ad EN; e come PE ad EN, così PD a DM; e come PD a DM, così PC a CG; dunque le perpendicolari FO, EN, DM, e CG sono in proporzione aritmetica frà esse, e perciò le perpendicolari DM, ed EN sono mezze proporzionali aritmetiche frà CG2, e FO1. Oltr' a ciò le perpendicolari DM, ed EN segano i lati PG, e PC in parti, che sono mezze proporzionali aritmetiche frà PF, e PC, e frà PO, e PG; perche sendo per Euclide come PF a PE, così PO a PN; e come PE a PD, così PN a PM; e come PD a PC, così PM a PG; le PE, e PD sono mezze proporzionali aritmetiche frà PF, e PC; e le PN, e PM so-

no

no mezze proporzionali aritmetiche frà PO, e PG. Dimostrerò ora, che ancora i cerchi CYB, e DIB segano la retta GO ne' punti M, e N.

Alzinsi da i punti D, ed E due perpendicolari fino alle periferie de' cerchi CYB, e DIB; perche i diametri de' cerchi successivi sono per costruzione 5, 4, 3, e 2, sono in proporzione aritmetica, dunque anco i cerchi AQB, CYB, DIB, ed EOB saranno in proporzione aritmetica fra essi; perche per Archimede i cerchi sono fra essi come i diametri: ma se sono in proporzione aritmetica, i cerchi BID, e BYC saranno mezzi proporzionali aritmetici fra i cerchi BOE, BQA; e dello stesso modo i semicerchi BID, e BYC saranno mezzi proporzionali aritmetici fra i semicerchi BOE, e BQA.

Ma i cerchi BID, e BYC tagliano per costruzione la PA in parti, che sono mezze proporzionali aritmetiche fra PF, e PC; perche tagliano la BA ne' punti E, e D, cioè ne' punti estremi delle linee PE, e PD, mezze proporzionali aritmetiche fra PF, e PC; e noi abbiamo provato, ch'è come PF, a PE, così PO a PN, e come PE a PD, così PN a PM, e come PD a PC, così PM a PG; dunque se i semicerchi BID, e BYC, i quali sono mezzi proporzionali aritmetici fra i semicerchi BOE, e BQA, tagliano la PC nelle parti PE, e PD, mezze proporzionali aritmetiche fra PF, e PC; devono anche tagliare la PG in parti, che siano proporzionali alle parti PE, e PD del dato PC: perche se i cerchi, che sono fra essi nella medesima proporzione segano due lati, che sono proporzionali fra essi, li segano proporzionalmente; ma le parti proporzionali a PE, e PD sono PN, e PM, dunque i semicerchi BID, e BYC segano la OG ne' punti N, e M, e perciò le perpendicolari alzate da i punti E, e D terminano alla linea retta OG, ed alle periferie de' cerchi; ch'è ciò si dovea dimostrare. Dimostreremo ora lo stesso per la via negativa.

Prendasi la linea retta AG, e si divida nelle cinque parti uguali AB, BD, DE, EF, ed FG, e s'alzi la perpendicolare BC, uguale a BA unità; e dal punto F, punto estremo

Tav. II. Fig. IX.

mo

mo di AF4 alzisi la FH, uguale a 2 unità AB, e col diametro di GA descrivasi il cerchio GOA, il quale passerà per il punto H, termine di FH2, perche è come AB1 ad FH2, così FH2 ad AF4: Poscia col diametro di AD, descrivasi il cerchio ACD, il quale passerà per il punto C, termine dell' unità BC, e tirisi la nostra linea retta CH; Indi descrivansi co' diametri di AE3, e di AF4, i cerchi ARE, ed AQF. Dico, che questi segano la retta CH ne' punti L, ed I; e che solamente EI, e DL sono le radici dell'ascisse AE, ed AD.

Se l'Avversario lo niega, allunghi egli le due DL, ed EI di modo, che terminino in qualunque punto fuori della linea retta CH, come per esempio, in M, e in N: Se i cerchi passano per i punti M, ed N, per i punti A, C, M, N, passerà ancora una Parabola; perche se il cerchio ARE passa per il pento M, sarà come ED a DM, così DM a DA, ma ED è uguale ad AB unita; dunque sarà ancora come AB a DM, così DM, a AD, e perciò DM sarà radice di DA, dunque il punto M è punto di cerchio, e di parabola. Dell'istesso modo si dimostra, che se il cerchio passa per il punto N, come vuole l'Avversario, il punto N è punto di cerchio, e di parabola. Dimostrerò ora, che i cerchi non possono passare per i punti M, ed N.

Suppongasi pure per l' Avversario, che i cerchi passino per i punti M, ed N: se è così, la Parabola non passarà per il punto H, termine dell'applicata FH2, perche, o le applicate intercette frà EN, ed FH, le quali terminano per l' Avversario alla Parabola, son sempre una maggiore dell' altra, almeno per un punto, e in tal caso la Parabola segherà il cerchio AOG, per esempio, nel punto P, e non nel punto H; perche se le applicate son sempre una maggiore dell' altra, la Parabola si discosta sempre dalla retta CH, e perciò non giungerà mai al punto H: ovvero le porzioni delle linee intercette frà la retta CH, e la curva CMN, come sono LM, IN, &c. cominceranno a diminuirsi in lunghezza in un punto della Parabola, come per esempio, nel punto N; e in questo caso la Parabola farà angolo nel punto N, e la curva sarà ACMNH, e la Parabola non

sarà

sarà una curva continuata; e se la Parabola non è una curva continuata, ma fa angolo nel punto N, le applicate, che terminano ad essa, non posson essere radici; perche se la Parabola fà angolo, non dà costantemente i punti, a i quali terminano le radici delle ascisse dell'asse, a similitudine del cerchio, come vuole Renato. Adunque la perpendicolare DM non può esser mezza proporzionale frà AB, ed AD; ne EN mezza proporzionale frà AB, ed AE, e perciò i cerchi non passano per i punti N, ed M, ma passano per i punti L, ed I.

Lo stesso si dimostra, se l' Avversario vuole, che la Parabola passi per i punti X, e Y, o per qualunque altro punto degl' intercetti frà L, ed M, frà I, e N; ed alla perfine la Parabola non può mai segare il cerchio AOG nel punto H, se non fà angolo curvilineo in qualche punto del suo perimetro. Dimostrerò ora, che DL, ed EI sono radici delle ascisse AD, ed AE.

La perpendicolare EI è radice di AE; perche avendo noi dimostrato, che il cerchio AQF sega la retta CH nel punto I, per la decimaterza del sesto è come FE ad EI, così EI ad EA; e come AB unità uguale ad FE è ad EI, così EI ad EA: e dello stesso modo, come ED a DL, così DL a DA, e come AB a DL, così DL a DA; ma FH2 è radice di AF4, e BC1 è radice di AB1 per costruzione, dunque la retta CH è il luogo delle radici.

Per dimostrare poi, che le infinite radici terminano alla retta CH, prendasi qualunque porzione GT, e col diametro di TA descrivasi il cerchio, e dal punto Z, punto estremo di TZ uguale all'unità FG, alzisi la perpendicolare ZK; questo cerchio segherà la HC nel punto K, e lo stesso avverrà di tutte le altre.

CONSIDERAZIONE, E CONCLUSIONE.

ABiamo dunque dimostrato, e per lo metodo degl'indivisibili, e degl' infiniti, e per gl' elementi di Euclide, e per le proposizioni d' Archimede il nostro assunto; sarà

farà con ciò chiaramente dimostrato, che la Parabola Apolloniana non dà, a similitudine del cerchio, costantemente i punti delle radici delle ascisse dell' asse, siccome Renato des-Cartes, e tutti i Sig. moderni Geometri han preteso, che dasse; ond' è che sarebbe annojare il Lettotore, se dopò tante, e sì chiare dimostrazioni, quante son le antecedenti, io ne volessi addurre ancora delle altre: Rimane dunque chiaro, che la Parabola Apolloniana nata dalla sezzione del cono, non hà le proprietà, che da Apollonio se l' assegnano; e che il vero perimetro della Parabola si compone delle nostre linee rette tirate da' punti estremi delle radici di numero intero, cioè 1, 2, 3, &c. fino all' infinito.

Stabilita già questa verità, noi nomaremo in appresso il nostro Rettilineo: *UN RETTILINEO PARABOLICO PIANO*, alle di cui parti assegneremo gl' istessi nomi, che da' Geometri s' assegnano alle parti della Parabola Apolloniana: e per esempio, AB, ovvero BC sarà unità, ovvero parametro, AH asse, AN, AD, AP, AF, e tutte le altre saranno applicate, ovvero radici; ed il composto di tutte le linee rette AC, CE, EG, e GL sarà il perimetro della Parabola, qual perimetro può anco nomarsi una curva composta di linee rette determinate da punti determinati, come abbiam detto; ciò ch' è appunto quello, che sempre han desiderato di ritrovare gl' antichi Geometri, i quali conoscevano bensì generalmente, che il perimetro della Parabola è un aggregato di linee rette, le quali tutte fanno angolo frà esse; ma non giunsero a determinare i veri punti, per i quali quelle si descrivono, e gl'angoli, che frà esse fanno, ciò ch' è avvenuto fortunatamente a me di ritrovare.

Tav. I. Fig. IV.

Dopò questo sembra, che io dovessi non più ragionare di questo Problema: ma perche è legge stabilita frà Geometri; *che chi vuole impugnare una proposizione dimostrata, deve additar l'errore, che in quella proposizione si contiene.* In un secolo, nel quale tutti i moderni Geometri obbliando, che la costruzione meccanica non può legitima dimostrazione produrre, han ricevuto le curve d' Apollonio per linee, che abbiano proprietà costanti, e dimostrate;

non posso tralasciare di additar l'errore, che nelle pretese dimostrazioni d'Apollonio si contiene. Egli è ben vero però, che i signori Geometri non han pratticato meco questa legge da me accennata; imperocche niuno di essi ave additato alcuno errore nelle mie dimostrazioni, ma si son tutti contentati di opponere per la via degli assurdi; la qual cosa fà conoscere, ch' amano d' impugnare, ma non di studiare le altrui dimostrazioni. Additiamo noi dunque, in che consista l'errore d'Apollonio.

L'errore, ch'è nella dimostrazione d'Apollonio, consiste in ciò, ch' egli, nel costrurre la sua Parabola, non siegue il rigore de'postolati di Euclide, ma sega il cono per lo mezzo di un piano parallelo ad un de' lati del triangolo fatto dalla sezzione del medesimo cono per l'asse; donde ne avviene, che immaginando egli dentro il cono un' asse indeterminato, e al vertice di esso un parametro, o sia unità, preso ad arbitrio; ed immaginando oltr' a ciò alcuni cerchi particolari, i quali passino per i punti estremi del perimetro della Parabola, per mezzo de' quali trova alcune applicate particolari, che sono mezze proporzionali frà il parametro, e le ascisse; conchiude, che'l luogo generale delle mezze proporzionali, frà il parametro, e le ascisse, sia il perimetro della sua Parabola, ciò che non è vero, perche da una costruzione meccanica non si può generale consequenza dedurre.

La verità di quello, che abbiam detto, si conosce meglio, esaminandosi il modo meccanico, col quale i Signori moderni Geometri descrivono nel piano la Parabola Apolloniana; perche in quello si vede, che descrivendo essi la Parabola per lo mezzo d'uno stromento meccanico, e poi prendendo per lo mezzo del medesimo stromento una sola mezza proporzionale frà 'l parametro, e l' ascissa, concludono male a proposito, che la curva, che forma il perimetro della Parabola è il luogo generale delle radici delle ascisse; e che perciò la Parabola dà, a similitudine del cerchio, costantemente in tutti i punti del suo perimetro, le medesime proprietà. Ora in grazia di quelli, a'quali non fus-

se

ſe noto il modo, col quale i Sig. moderni Geometri deſcrivono la Parabola nel piano; vogliamo dare un brieve ſaggio di quello, che inſegnano eſſi fare per lo mezzo de' loro ſtromenti meccanici, i quali, appreſſo a poco, ſon ſimili a quello, che noi riferiamo quì, pratticato da M. Oſpital, e Rainou.

Prendono eſſi AB per aſſe d' una Parabola, ed AC per parametro di quella, e poi tirano la linea CG perpendicolare ad AC, e parallela all' aſſe AB, e la ſuppongono immobile; di poi ſuppongono la riga AD, la quale s' aggiri intorno al punto A, come centro, e un altra riga, come EF, la quale camini perpendicolarmente ſopra la AC, da C verſo A, e da A verſo S; ma che ſi mantenghi ſempre equidiſtante dall' aſſe AB, di modo che tagli ſopra la AC porzioni uguali a quelle, che la riga AD taglia ſopra la linea CG, come ſe, per eſempio, la riga mobile AD taglia la perpendicolare immobile CG nel punto D, la diſtanza AE dev' eſſere uguale a CD: ciò fatto, dimoſtrano nel ſeguente modo, che il quadrato di AE, ovvero di NM è uguale al rettangolo, che ſi fà da CA parametro, per AN: la loro dimoſtrazione è la ſeguente.

Tav. II. Fig. X.

Perchè è come AE, ad EM, così AC a CD, il rettangolo fatto da EM per l'unità AC, è uguale al rettangolo fatto da AE per CD; ma CD è uguale ad AE, dunque il quadrato di AE è uguale al rettagolo fatto da EM per il parametro AC: Ma EM è uguale ad AN, ed AE è uguale ad NM, dunque il quadrato di NM è uguale al rettangolo fatto da NA per AC, e perciò NM è applicata di Parabola.

La antecedente è l'arte, con la quale, per lo mezzo dello ſtromento meccanico, i Signori moderni Geometri s'immaginano di trovare il luogo generale delle radici: perchè, dicono eſſi, noi facciamo nella deſcrizione della Parabola tutto quello, ch' Euclide fà nella deſcrizione del cerchio; che ſia coſì. Egli ordina, che ſi deſcriva la periferia del cerchio, poſcia, alzando da qualunque punto del diametro del cerchio una perpendicolare ſino alla periferia, dimoſtra, che la perpendicolare è mezza proporzionale fra le parti del diametro.

Dell'istesso modo; noi facciamo caminare la perpendicolare mobile EF sempre equidistante dall' asse AB in modo, che tagli sopra l' AC porzioni uguali a quelle, che la riga AD taglia sopra la linea CG; in questo modo le due righe descrivono tutti i punti del perimetro della Parabola, giusto come il compasso descrive tutta la periferia del cerchio: ciò fatto, dimostriamo, che NM è radice di AN, giusto come Euclide dimostra, che una perpendicolare è mezza proporzionale frà le parti del diametro; e concludiamo, che il perimetro della Parabola Apolloniana è il luogo generale delle radici delle ascisse dell' asse, giusto come Euclide conchiude, che la periferia è il luogo generale delle sue mezze proporzionali.

Gl'antecedenti son gl' argomenti, co' quali Renato des Cartes hà preteso, e i suoi seguaci pretendono, che lo stromento meccanico dia egualmente, che 'l compasso le proprietà in tutti i punti del perimetro della Parabola; e che nulla rilievi allo scoprimento della verità la maggiore, o minore difficultà, che s' incontra nel costruire: Io però farò vedere ora chiaramente, che la costruzione meccanica non può dare le proprietà, e ne additarò di ciò la cagione. S'intenda già per lo mezzo dello stromento meccanico descritta la curva, io provo, che questa curva non dà ne' punti del suo perimetro le mezze proporzionali frà 'l parametro e le ascisse, e lo provo con la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE.

I Punti del perimetro della Parabola, che si descrive per lo mezzo dello stromento meccanico, non corrispondono a i punti dell' asse, a' quali terminano i quadrati delle radici.

COSTRUZIONE.

Tav. II. Fig. XI. Sia AT l' asse d' una Parabola, ed AD il suo parametro, o sia unità; DQ sia la perpendicolare immobile, ed AO la

la riga mobile, la quale si aggiri intorno al punto A, ed MN la riga perpendicolare mobile, la quale camini per la retta AV, sempre equidistante dall'asse AT in modo, che tagli sopra la AV parti uguali a quelle, che la riga AO taglia sopra la perpendicolare immobile DQ, e suppongasi, che con questo moto le righe abbiano già descritta la curva A, P, &c. Dico, che in niun punto della curva descritta cade la radice dell'ascissa corrispondente al detto punto, e lo dimostro, facendo prima la seguente costruzione.

Prendasi sopra l'asse AT la porzione AB uguale al parametro AD, e formisi il quadrato ABCD; poi suppongasi la porzione BT, dell'asse AT, divisa in punti, o parti infinite, come per esempio BR, RE, EH, &c. le quali siano indivisibili; indi dal punto R tirisi la RS parallela a BC, e si prolunghi quanto si voglia, e sopra la AV prendasi la DG uguale a BR, la GK uguale ad RE; e sopra la CQ taglisi la CY uguale a BR, ovvero DG; la YZ, uguale ad RE, ovvero GK; dipoi dalla perpendicolare immobile DQ, taglisi la DY uguale ad AG, ovvero ad AR, e prolunghisi la AY, fin che s'incontri colla GX prolungata, come per esempio, nel punto F: e dello stesso modo poi taglisi, sopra la perpendicolare immobile DQ, la DZ uguale ad AK, ovvero ad AE, e tirisi la AZ, e prolunghinsi la K8, uguale ad AE, e la AZ finche s' incontrino in un punto, come per esempio in L; ciò fatto, Dico, che niun punto del perimetro della Parabola descritta corrisponde a' punti estremi delle ascisse dell' asse.

DIMOSTRAZIONE.

Noi abbiamo supposta descritta la Parabola infinita A, P, &c., dunque la riga mobile AO, la quale si è aggirata intorno ad A, aurà segnato tutti i punti della DC uguale al parametro AD; e la riga MN tutti i punti della AD parametro, e perciò le due righe auran generato tutte le radici de' quadrati minori dell'unità, come per esempio, l' applicata segnata P11, e tutte le altre. Ma la riga AO, dopo

pò gionta che farà in C,continuando ad aggirarsi intorno il punto A, necessariamente passerà per il punto Y; perchè CY è per suppofizione un punto indivisibile, e perciò il primo punto immediato dopò il punto C.

Ma se è così, quando la riga AO è gionta in Y, la riga perpendicolare MN farà gionta in G; perchè,per costruzione,AG è uguale a DY, ed AG,per legge dello stromento meccanico,dev'essere distante da AT per una linea uguale a DY, dunque necessariamente le due righe mobili faran gionte,una in Y,l'altra in G:ma se è così,il punto,nel quale si suppone,che la curva seghi la linea retta RS;non è punto di radice dell'ascissa AR;perche,quando le righe sono gionte in G, ed in Y, prolungate, le due AY, e GX si sono incontrate nel punto F; e con ciò han generato i due triangoli simili ADY, ed AGF, i quali producono la EF radice di AE, e non di AR; perche e come AD a DY, così AG a GF,e perciò il rettangolo di DY per AG è uguale al rettangolo di AD per GF, cioe il quadrato di EF uguale al rettangolo di EA per AD, dunque la prima radice, che può generare lo stromento meccanico è la radice dell'ascissa AE, e non quella di AR.

Ma AR è la prima ascissa per costruzione,perche AB è uguale al parametro,e BR si e supposta essere una quantità indivisibile;ed ora abbiamo provato,che lo stromento meccanico non può dare la prima radice in altro punto, che nel punto F, che corrisponde alla seconda ascissa AE; dunque la curva, segando la linea RS in un punto, non dà in quel punto la radice dell' ascissa AR, e perciò i punti del perimetro della Parabola non corrispondono giustamente a i punti delle ascisse, ch'è ciò si dovea dimostrare.

Dello stesso modo,se si prende per prima ascissa la AE, la riga circolare AO farà gionta in Z, quando la perpendicolare MN farà gionta in K, e perciò AZ, e K8 prolongate s'uniranno nel punto L, e genereranno i triangoli ADZ, AKL, e perciò la prima ascissa farà AE, e la prima radice caderà nel punto L, e così successivamente fino all' infinito niuna radice nella Parabola corrisponderà all' ascissa dell'asse.

CON-

CONSIDERAZIONE.

DAll'antecedente dimostrazione manifestamente si conosce dove consista l'errore, che nel modo meccanico, col quale la Parabola si descrive nel piano, si contiene: ma per maggior chiarezza vogliamo brievemente additarlo.

Quei Signori Geometri, che si sono acquietati alle assertive di Renato des-Cartes, han creduto, che *la Parabola, ancorchè meccanicamente descritta, dasse, a similitudine del cerchio, costantemente in ogni punto del suo perimetro le proprietà.* Ora dopò l'antecedente dimostrazione, facendo noi un paragone frà il cerchio, e la Parabola, vogliamo vedere, se si potea mai dire, che la Parabola dà in ogni punto del suo perimetro le proprietà.

Nel cerchio, se io prendo qualunque punto, ed addimando ad Euclide, che mi provi in qual punto cada la mezza proporzionale frà le parti del diametro, esso forma i suoi triangoli simili da quel punto da me dato, e mi dimostra, che la perpendicolare, che cade da quel punto, è mezza proporzionale frà le parti del diametro, siccome lo stesso ave dimostrato da un punto preso ad arbitrio, a fine di provare il suo assunto.

All'incontro, se dimando ad un geometra Cartesiano, che, dopò che hà descritto la sua Parabola, mi dimostri, che il punto del perimetro, che cade nella linea RS, è punto, al quale termina la radice di AR, egli mi dimostrerà, che il punto F è punto di Parabola: se poi le dimando, che mi dimostri, che il punto del perimetro, che cade nella linea retta EF allungata, mostra la radice dell'ascissa AE, egli mi dimostrerà, che il punto L è punto di Parabola, e così successivamente facendo, mi dimostrerà sempre per punti di Paradola i punti successivi alle ascisse, ciò che vale à dire, che i geometri Cartesiani prendono per costruzione quante mezze proporzionali vogliono frà il parametro, e le ascisse, ma la curva, che descrivono, non dà i punti corrispondenti alle ascisse dell' asse, siccome noi abbiamo dimostrato; dunque la Parabola meccanicamente descrit-

descritta nõn dà, a similitudine del cerchio, costantemente in ogni punto del suo perimetro le proprietà.

All' incontro i nostri Rettilinei parabolici piani son quelli, che danno in ogni punto delle nostre linee rette le proprietà da noi a quelli assegnate; perchè noi descriviamo prima geometricamente i nostri Rettilinei parabolici piani, poi dimostriamo, come nella Figura I, II, e III, della tavola prima, che se in un punto delle nostre linee rette non si ritrovasse la proprietà, che noi abbiamo asserito nella proposizione, nè verrebbe per assurdo, che 2 non fusse radice di 4; poi dimostriamo à priori, come nella VII. Figura, della tavola seconda, che in ogni punto delle nostre linee rette si deve ritrovare la stessa proprietà da noi assegnata alle linee rette; e che il perimetro della Parabola Apolloniana, deve far angolo in un punto, come nelle Figura VIII. e IX della seconda tavola, e tutto ciò geometricamente.

All' incontro i Signori Geometri Cartesiani descrivono meccanicamente la Parabola, e non solo non dimostrano, che in ogni punto del perimetro di quella cade la radice dell' ascissa corrispondente, anzi si dimostra il contrario, come s'è veduto dall'antecedente dimostrazione: dal che è manifesto, che le nostre proposizioni sono geometriche, e concludenti, e quelle de' Signori Geometri Cartesiani son meccaniche; ond' è, che le loro curve non abbino le proprietà, che se le assegnano.

Ora dopò avere noi in tante guise dimostrato il nostro assunto; e dopò avere additato l' errore, che nella dimostrazione d' Apollonio si contiene, dovressimo rimanerci di più ragionare delle curve: ma perche è pur troppo grande la prevenzione di mente, colla quale son ricevute da' signori moderni Geometri le curve; Vogliamo risponderre ancora ad alcune obbiezioni, ch' essi deducono da ragioni estrinseche, e in quelle farem vedere alcune utilissime considerazioni sù del moto de' corpi projetti, e sù dell' Ottica: le obbiezioni son le seguenti.

La prima, che nel nostro Rettilineo parabolico piano non si ritrovano quelle radici delle ascisse dell' asse, le quali sono minori dell'unità.

La

La feconda, che l' Ottica ne verrebbe defraudata, perche, nel noftro Rettilineo parabolico piano, non fi ritrova, come nella Parabola, il punto del foco, nel quale fi unifcono tutti i raggi.

La terza, che Galileo avendo fpiegato il moto de' corpi projetti, confiderando la Parabola come una curva continuata, bifognerà fpiegare con nuove proprietà le leggi del moto; e nel far effi quefte oppofizioni, diranno ancora, che noi fteffi nella Meccanica, e nella prima impreffione del noftro nuovo Metodo, abbiamo confiderato la Parabola, come una curva continuata; perciò noi vogliamo rifpondere, ad una ad una, a tutte quefte trè obbiezioni.

Alla prima obbiezione rifpondiamo, aver noi a baftanza dimoftrato nelle noftre antecedenti propofizioni, che niuna applicata, che termina alla curva, è radice della fua afciffa corrifpondente, e che perciò le applicate minori dell' unità nè meno fono radici delle afciffe minori dell' unità: Ed oltr' a ciò rifpondiamo, che nel noftro Rettilineo parabolico piano, le parallele minori dell' unità non fono radici, perche fon lati di triangoli ifofceli, e che delle radici de' quadrati minori dell' unità noi non ne abbiam bifogno; perche, per trovare due, tre, ed infinite mezze proporzionali frà due linee rette date, non abbiamo bifogno delle radici minori dell' unità, come fi vedrà in appreffo: Per la qual cofa ci bafta aver dimoftrato in tanti modi, quanti fon quelli, che fi fon veduti in quefta Raccolta, che 'l luogo delle radici delle afciffe dell'affe fi trova nelli noftri Rettilinei parabolici piani, non nelle curve d' Apollonio; e con ciò lafciamo la cura a quei Signori Geometri, che vogliono far ufo di quefti quadrati minori dell' unità, di cercare il luogo, dove rifiedono, ed il modo di coftruirli, e paffiamo alla rifpofta della feconda obbiezione.

Alla feconda obbiezione rifpondiamo generalmente, che da noi non fi niega, che le linee meccaniche poffono avere il lor utile ufo nella Fifica; perche, ficcome nelle meccaniche fi trova, per lo mezzo di quelle, una qualche

approssimazione al vero, così si possono spiegare utilmente le cagioni fisiche, nelle quali non si ricerca, come nelle geometriche, il vero esatto: In pruova di ciò Archimede si è servito utilissimamente delle spirali di Conone, della cicloide, della cisoide, e di tutte le altre linee meccaniche; ma non hà preteso, che avessero proprietà geometriche, nè di aver ritrovato, per lo mezzo di quelle, il vero esatto, e lo stesso hà fatto delle linee curve d'Apollonio.

Per quello poi, che s'attiene all' Ottica, riferisco qui brievemente quello, che mi diceva intorno a tal materia, il non mai per le sue virtù a bastanza lodato Padre Frà Domenico Basile Domenicano, che Iddio abbia in Cielo, il quale ci fù da troppo acerbo destino rapito. Egli era, come a tutti è noto, dottissimo nell' Ottica, e gran fabro di Telescopij, di Microscopij, e di tutte le machine all' Ottica appartenenti; questo grand' Uomo mi diceva, ch' egli conosceva, anco per esperienza, che le Parabole son linee immaginarie, e che non si possono descrivere; perche facendo egli le forme per fabbricare le sue lenti, ritrovava, che sempre, che voleva formare una figura parabolica, formava una figura sferica, mai però poteva eseguire la Parabola: dalla qual cosa n' avveniva, che i raggi giammai si potessero, per lo mezzo del foco della Parabola, unire in un punto; e che perciò quello, che Renato dice nel suo Trattato *de Methodo expoliendi vitra*, non solo sia impossibile in prattica, ma che ancora non sia vero in teorica; perchè quando si trovassero stromenti così esatti, per i quali si potesse fare la linea parabolica, questa non avendo le proprietà, che se le assegnano, i raggi non s'unirebbero mai perfettamente nel punto del foco: Così dunque, per ciò che riguarda all'Ottica, possono i Fisici considerare le curve d' Apollonio, ma non possono sperare di conseguire, anco nella Fisica, altro, che per approssimazione quello, che intorno alle curve d'Apollonio a loro stessi propongono.

Alla terza opposizione si risponde, che il corpo projetto descrive il perimetro del nostro Rettilineo parabolico piano, e che perciò descrive tante porzioni di linee rette, le

le quali sono porzioni d' ipotenuse; ed eccone la pruova geometrica.

Fingiamo, che dal punto A si voglia gittare una bomba nel palaggio segnato X, e S; la bomba descriverà due porzioni di Rettilinei parabolici piani. La linea AC, ch' è ipotenusa del triangolo ABC, sarà la linea d'elevazione, ed il primo moto della bomba, la quale gionta in C, anderà in E, punto estremo dell' applicata DE2, indi in F, punto estremo dell'applicata FG3, poi in H, punto estremo dell' applicata IH4, e finalmente in Z, punto estremo dell' applicata Z12 uguale a 5. unità: Ma mancando, per esempio, in K l'impeto impresso dalla forza della polvere, la bomba comincierà a descrivere nel punto K un altro Rettilineo parabolico, ed anderà in N, poscia in P, punto estremo dell'applicata OP2, indi in T, punto estremo dell'applicata QT3, fino a tanto, che in S incontrerà il bersaglio proposto; ed ecco, che il corpo projetto descrive due de' nostri Rettilinei parabolici, quali s'intersecano in un punto del perimetro formato dalle nostre linee rette. Tav. II. Fig. XII.

A questa proposizione sembra, che se l' opponga il senso; perche, guardandosi nell'aria il moto d'una bomba, o d'altro corpo projetto, sembra, che descriva manifestamente una linea, il di cui perimetro sia una curva perfetta: Ma egli è da considerarsi, che ciò avviene a cagione, che nostra mente non può distinguere per lo mezzo de sensi le impercettibili linee rette, de' quali si compone il perimetro della Parabola; ed a cagion d'esempio, nel corpo projetto, il parametro AB sarà un punto indivisibile, la retta AD tre punti, e le due rette AC, e CE costeranno di punti impercettibili, e lo stesso avverrà delle rette EF, FH, e di tutte le altre: per la qual cosa gl' angoli ACE, CEF, EFH, e tutti gl'altri saranno al senso impercettibili; e quindi è, che non potendosi distinguere col senso gl'angoli, e la linea, che descrive la bomba, o altro corpo projetto, sembra una curva perfetta, quando non è, ch' uno aggregato di linee rette, siccome noi abbiamo dimostrato. E per dimostrare ancor meglio, quanto abbiam detto; osservisi, che l'

asse AZ, nel corso, che fà una bomba gittata, la porzione, che abbiamo sopposto uguale a 25 unità AB, diviene uguale a un numero infinito di unità, se suppponiamo l'asse AB essere un punto; per la qual cosa le sezzioni AC, CE, EF, e tutte le altre saranno di numero infinito, e d'angoli infiniti, ed ogn' uno di essi impercettibile, e perciò sembra al nostro senso una curva perfetta quella, ch' è uno aggreato di linee rette.

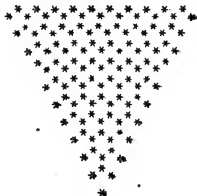
Si potrebbe poi per questa via determinare il vero angolo d'elevazione BAC, ed il vero luogo del punto K, per prendere le giuste misure valevoli a colpire al segno: ma perche nostra intenzione è, d'altro non fare, che additare generalmente le linee, che descrive il corpo projetto; lasciaremo ad altri la cura di ritrovare gl'angoli, e i punti da noi accennati.

Sarebbe ancora desiderabile, che altri ritrovasse le linee rette, de' quali si compone il perimetro dell' iperbole, e dell'ellisse, come noi abbiamo ritrovato quelle, delle quali si compone il perimetro della Parabola, e che lo stesso si facesse di tutte le altre curve meccaniche. Desiderabile ancora sarebbe, che si trovassero altri Rettilinei con altre proprietà; ma per far ciò bisogna, che i signori moderni Geometri si contentino di distornarsi un poco da' loro calcoli analitici, differenziali, integrali, ed altri, per applicarsi all'esatta costruzione sintetica, la qual è quella sola, che somministra esattamente le proprietà particolari delle figure geometriche.

Intorno poi all' esserci noi serviti nella Meccanica da noi publicata l'anno 1711. in Augusta, e nella prima impressione del nuovo Metodo, della Parabola considerata come una curva continuata; Si risponde, che non avevamo ancora noi allora ritrovate le linee rette, delle quali si compone il perimetro della Parabola, ciò che non è meraviglia, perche *Nox nocti indicat scientiam*; tanto più, che Galileo medesimo dal modo di descriver la Parabola, dal quale abbiamo dedotta questa grande Invenzione, non hà conosciuto quello, che dalla sua descrizzione si

ne ſi potea dedurre a favore della Geometria.

Quello dunque, che in queſta Raccolta abbiam detto, è, a mio credere, ſufficiente a far conoſcere a' Signori Geometri la verità delle noſtre propoſizioni: per la qual coſa altro non reſta, acciò che ſiano le noſtre propoſizioni ricevute da' ſignori Geometri, ſe non che vogliano alquanto diſtornarſi dall' abito di mente, ch' han fatto sù le curve, per eſaminare ſeriamente le noſtre propoſizioni. Paſſiamo ora a dimoſtrare la noſtra Duplicazione del Cubo con le ſequenti propoſizioni.

DU-

DUPLICAZIONE DEL CUBO,

OVVERO

METODO GEOMETRICO

Per trovare, fra due linee rette date, infinite mezze continue proporzionali.

DUPLICAZIONE
DEL CUBO
PROPOSIZIONE I.
PROBLEMA I.

Ata la linea retta AF, dividerla in modo, che tutte le perpendicolari alzate da'punti di essa termino alle nostre linee rette, e siano mezze proporzionali frà le porzioni di AF, dove le perpendicolari cadono, ed una parte di AF presa per unità.

Tav. I. Fig. 1.

Questa proposizione è stata bastantemente dimostrata nell'antecedente Raccolta, e perciò passiamo alla seguente considerazione.

CONSIDERAZIONE.

QUesto Rettilineo parabolico piano produce una curva infinita, la quale costa di linee rette determinate da' punti determinati: perche se si prolunga l'asse AF9, finche venga uguale a 16 unità AB; tutte le porzioni della linea retta prolungata saranno quadrati, le radici de' quali partono da'punti estremi di esse intercette, e terminano alla linea retta, che cōgiunge per i punti estremi l'applicata FG3, e l'applicata 4. Lo stesso avverrà se si prolunga la AF, secondo l'ordine de'numeri quadrati, come 25, 36, &c. ponendo a' punti estremi de'numeri quadrati le radici di numero intero, le quali sono in proporzione aritmetica, come sono 4, 5, 6, e sino all'infinito: ond'è, che tutte le linee rette, come AC, CE, EG, e tutte le altre, facendo angoli frà esse ne' punti C, E, G, e in tutti gl' altri, formeranno il perimetro del nostro Rettilineo parabolico piano; e perche le linee rette tirate da' punti estremi delle

radici 1, 2, 3, 4, &c. fino all'infinito, non chiudono mai ſpazio, percio il perimetro, che formano ſi può appellare una curva.

PROPOSIZIONE II.

SE ſi divida una linea in nove parti uguali, e ſopra di eſſa ſi deſcriva un Rettilineo parabolico piano, e dal vertice di eſſo ſi formi un triangolo iſoſcile, e rettangolo, dentro del quale ſi tirino fino all' ipotenuſa linee rette, e parallele alla baſe; queſte ſaranno terze proporzionali dell'unità, e delle applicate, le quali chiameremo quadrati, avvalendoci de' termini aritmetici nella Geometria.

ESPOSIZIONE, E SUPPOSIZIONE.

SOpra l'aſſe AS, diviſo in nove parti uguali, una delle quali ſia, per eſempio, AB, ſuppongaſi deſcritto il Rettilineo parabolico piano AEH, nel modo da noi inſegnato, e dentro di eſſo l'applicata BY, uguale ad AR, ovvero AB unità, e la CE uguale ad AG, cioè a due unità AB, e la SH uguale ad AT, o ſia a tre unità AB; e ſuppongansi tirate le tre linee rette AY, YE, ed EH nel modo da noi inſegnato; e dal vertice del Rettilineo ſi deſcriva il triangolo ASI iſoſcile, e rettangolo in S, e tirinſi le parallele PN, CF, &c. Dico, che SI, e PN ſono quadrati di SH, e PO, ovvero terze proporzionali dell'unità AB, e delle applicate SH, e PO.

Tav. III. Fig. XIII.

DIMOSTRAZIONE.

PEr l'antecedente propoſizione, nella quale abbiamo dimoſtrato, ch' il noſtro Rettilineo ave le proprietà della Parabola piana, le SH, e PO ſono applicate corriſpondenti all'unità AB; dunque, per la proprietà della Parabola, ſarà come SA ad AB, così 'l quadrato di SH a BY unità, e perciò ancora quadrato; e ſarà come PA ad AB, così

così 'l quadrato di PO all' istessa BY: Ma, per la seconda del sesto, è ancora come SA ad AB, così SI a BY; e come PA ad AB, così PN a BY; ma YB è uguale ad AB unità; dunque i quadrati di PO, ed SH avranno all' unità AB, o sia BY l'istessa proporzione, che SI, e PN hanno alla medesima unità BY; dunque i quadrati delle applicate SH, e PO saranno uguali alle linee SI, e PN. Ma SI è il quadrato di SH per costruzione, perche si è fatto uguale a nove unità AB; dunque ancora PN sarà il quadrato di PO, e perciò SI, e PN saranno i quadrati delle applicate SH, e PO, ch' è ciò si dovea dimostrare. Lo stesso si dimostra di qualunque altra delle applicate prolungate fino all' ipotenusa AI, come per esempio, CF, XZ, &c.

COROLLARIO.

LI triangoli ASI, APN, ACF, e tutti gl' altri, che s'intendono descritti dentro il triangolo ASI, sono triangoli isoscili, perche sono simili al triangolo ASI.

PROPOSIZIONE III.

PROBLEMA II.

FRa le due linee rette date X, e Z, ritrovare una mezza proporzionale.

COSTRUZIONE, E DIMOSTRAZIONE.

PRendasi AX, uguale alla minore data X, per unità, o sia parametro, e prolunghisi sino in B, di modo, che AB sia maggiore della maggiore data Z, cioè sia una lunghezza, la quale abbia la lunghezza di un numero quadrato maggiore della linea Z, per esempio, uguale a 25 unità AX: poi si prenda AB per asse, e descrivasi, come abbiam fatto nell'antecedente proposizione, il Rettilineo parabolico piano AYFINV, e formisi il triangolo isoscile ABC, e dal-

Tav. III. Fig. XIV.

e dalla base BC taglisi la B10 uguale alla maggiore data Z, ed alzisi la perpendicolare 10*f* fino all' ipotenusa AC, e tirisi la *d-f* parallela a BC: l' applicata *d e* sarà la mezza proporzionale ricercata; perche, per l' antecedente proposizione *d-e* è mezza proporzionale fra l' unità AX, uguale alla data X, e *d-f*, uguale alla maggiore data Z, è quadrato di *d-e*.

PROPOSIZIONE IV.

PROBLEMA III.

Tav. III. Fig. XV.

DAto il Rettilineo parabolico piano ABCMNO, dentro del quale si concepiscano descritte infinite applicate corrispondenti all' unità AB: trovare il luogo, nel quale terminano i cubi delle infinite applicate all'asse di esso Rettilineo di modo, che i cubi delle sudette applicate siano le stesse applicate prodotte fino al luogo cercato.

COSTRUZIONE.

PEr la proposizione prima formisi il Rettilineo parabolico piano ABCNO, nel quale, AB sia il parametro, ovvero unità, AD sia 4 unità, ed AN 9 unità: l' applicata BC sia 1, l'applicata DE, 2, e l'applicata NO, 3. La BN porzione dell' asse AN, intendasi divisa in punti, o parti infinite; e da i punti infiniti della BN intendansi tirate infinite applicate, le quali terminino alle due linee rette CM, ed MO.

Indi prendasi la NP uguale ad AN9, e tirisi l' ipotenusa AP: dipoi la DM2 prolunghisi fino in E, di modo, che DE sia uguale ad 8 unità AB; e la NO3 prolunghisi fino in Q, di modo, che NQ sia uguale a 27 unità AB. Poscia per i punti A, C, E, e Q si tirino le linee rette AC, CE, ed EQ, e s' intendano prolungate tutte le applicate intercette fra BC1, e DM2; fra DM2, ed NO3, fino alle linee rette CE, ed EQ. Prolunghisi poi la QE fin dove s'incontri

tri coll' asse AN, come per esempio nel punto Z; e dell' istesso modo la EC fin che s' incontri coll'asse AD nel punto I: ciò fatto

Dico, che tutte le applicate prodotte, che terminano alla linea CE, sono cubi delle applicate intercette fra BC1, e DM2: e che tutte le applicate prodotte, che terminano alla linea EQ sono cubi delle applicate intercette fra DM2, ed NO3, e sono tutti cubi corrispondenti all' istessa unità AB, o sia BC; cioè sono terze proporzionali delle applicate, e delli quadrati.

DIMOSTRAZIONE.

Perchè abbiamo descritto il Rettilineo parabolico piano ABCDMNO, ed abbiamo tirata l' ipotenusa AP: La DE sarà uguale a 4 unità AB, e la NP uguale a 9 unità AB; e perciò tutte le infinite applicate intercette fra BC1, e DM2, le quali terminano alla retta CM, sono radici degl' infiniti quadrati intercetti fra BC1, e DF4; li quali terminano all'ipotenusa AF: e tutte le infinite applicate intercette fra DM2, ed NO3, le quali terminano alla retta MO sono radici degl'infiniti quadrati intercetti fra DF4, ed NP9, per quello, ch' abbiamo dimostrato nella prima, e seconda proposizione. Dimostreremo ora, che gl' infiniti cubi dalle radici intercette frà BC1, ed DM2, fra DM2, ed NO, terminano alle due linee rette CE, ed EQ.

Tutte le infinite applicate intercette fra BC1, e DM2 sono in proporzione aritmetica frà esse; e tutte le infinite applicate intercette frà DM2, ed NO3 sono in proporzione aritmetica frà esse per quello, che abbiamo dimostrato nella proposizione, che si legge alla pag. 8. dell' antecedente Raccolta; e tutti gl' infiniti quadrati intercetti frà BC1, e DF4, e gl' infiniti quadrati intercetti frà DF4, ed NP9 sono in proporzione aritmetica, perchè sono nell' ipotenusa AP del triangolo isoscele, e rettangolo ANP: Ed oltracciò le infinite linee rette, che partono da' punti della BD, e terminano alla retta CE, sono in pro-

proporzione aritmetica, perche sendo nel triangolo rettangolo IDE, dal quale se si toglie il triangolo rettangolo IBC, le parallele intercette fra BC, e DE rimangono in proporzione aritmetica. Dell'istesso modo le parallele intercette fra DE8, ed NQ27 sono in proporzione aritmetica; perche se dal triangolo rettangolo ZNQ se ne toglie il triangolo rettangolo ZDE, le intercette fra DE, ed NQ rimangono in proporzione aritmetica.

Ma se le parallele, che terminano alla retta CE, sono in proporzione aritmetica fra esse; e quelle, che terminano alla retta EQ, sono in proporzione aritmetica fra esse: Le parallele, che terminano alla retta CE, saranno cubi delle applicate intercette fra BC1, e DM2; e quelle, che terminano alla retta EQ, saranno cubi delle applicate intercette fra DM2, ed NO3, èd eccone la pruova.

Le parallele intercette fra BC1, e DE8 sono tante in numero, quanti sono i punti della BD; e sono tante in numero, quante sono le applicate, o sian le radici intercette fra BC1, e DM2; e tante in numero, quanti sono i quadrati intercetti fra BC1, e DF4, e sono in proporzione aritmetica fra essi, giusto come le radici, ed i quadrati sono in proporzione aritmetica frà essi; dunque nelle parallele intercette fra BC1, e DE8, le quali terminano alla retta CE, vi sarà la somma di tutti i cubi delle radici intercette fra BC1, e DM2: perche se le parallele intercette frà BC1, e DE8 sono infinite, e sono in proporzione aritmetica fra esse, nelle dette parallele vi è la somma di tutte le infinite differenze, che posson essere fra i cubi intercetti fra BC1, e DE8: ma se nelle parallele, che terminano alla retta CE, vi è la somma di tutte le differenze, che possono essere fra 1, ed 8; le infinite parallele, le quali terminano alla retta CE, sono i cubi delle radici intercette fra BC1, e DM2; perche fra le parallele, che terminano alla retta CE, vi si contiene la somma di tutte le lunghezze de' cubi delle applicate intercette fra BC1, e DM2.

Ogni parallela poi è cubo della sua radice corrispondente, perche le parallele, che terminano alla retta CE,

sen-

sendo le stesse applicate allungate, ed essendo infinite, ed in proporzione aritmetica fra esse; necessariamente ogni cubo deve cadere nella porzione dell' asse AD, e nell'istesso punto, nel quale cade la sua radice: dunque la retta CE è il luogo de' cubi delle radici intercette fra BC1, e DM2.

Dell'istesso modo si dimostra, che la retta EQ è il luogo de' cubi delle radici intercette fra DM2, ed NO3, perche sono in proporzione aritmetica, mentre sono nel triangolo rettangolo ZNQ, e sono infinite, e tante in numero, quante sono le applicate intercette fra DM2, ed NO3, perche partono da' medesimi punti DN; dunque le due rette CE, ed EQ sono il luogo de'cubi delle radici intercette frà BC1, e DM2, frà DM2, ed NO3, ch' è ciò si dovea dimostrare.

CONSIDERAZIONE.

Fingiamo ora per impossibile, ch' un Avversario negasse, che i cubi terminano alle due linee rette CE, ed EQ; ciò supposto. Noi dimostriamo per la via negativa, che i cubi terminano alle due linee rette CE, ed EQ in quella stessa guisa, che nell'antecedente Raccolta abbiamo dimostrato, che le applicate, o siano radici, terminano alle due linee rette da noi ritrovate; ed eccone la dimostrazione.

DIMOSTRAZIONE II.

Dell' antecedente Proposizione.

Suppongasi per l' Avversario, che le parallele intercette fra DE8, ed NQ27, le quali terminano alla retta EQ, non siano cubi delle applicate intercette fra DM2, ed NO3; ciò supposto: I cubi delle dette applicate termineranno, o dentro, o fuori della retta EQ.

Tav. III. Fig. XV.

Suppongasi prima il cubo dell' applicata 7 H immediata a DM, non terminare nel punto K, ma nel punto G, fuori della linea EQ, per modo, che 7 G sia fuori della linea

nea EQ per la lunghezza della linea KG, o per qualunque altra minima quantità.

Se è così calisi la perpendicolare G 8, la quale termini alla retta EQ; in questo caso la linea segnata 6, ed 8 sarà uguale alla linea 7 G, che termina fuori della retta EQ: Ma se è così, il cubo dell' applicata 6 X sarà la linea 6 L maggiore di 7 G, perche l' applicata 6 X sendo maggiore dell' applicata 7 H, il cubo dell' applicata 6 X deve ancora esser maggiore del cubo dell' applicata 7 H; e per la stessa ragione i cubi delle applicate successive alla linea NO, termineranno fuori della retta EQ, per quantitadi sempre una maggiore dell' altra, come per esempio, un cubo terminerà in L, l' altro in M, l' altro in N, gl'altri in Z, Z, Z; ed in fine continuandosi sempre il numero de' cubi, finche si giunga al cubo, che parte dal punto N, punto estremo dell' asse; un cubo delle applicate intercette fra DM, ed NO, sarà molto maggiore di NQ uguale a 27 unità: Ma il cubo NQ è uguale a 27 unità AB per costruzione, e niun cubo delle applicate intercette fra DM, ed NO puol essere ne maggiore, ne uguale ad NQ, sendo tutte le applicate intercette fra DM, ed NO, maggiori di DM, e minori di NO; dunque niuno de' cubi, che sono da DE fino ad NQ potrà terminare fuori della linea EQ.

Non potranno i cubi ne meno terminare dentro della linea EQ: perche se qualunque di essi cubi, come per esempio, il cubo RSIV dell' applicata RS, terminerà dentro della linea EQ per qualunque minima quantità, e sia, per esempio, la linea R4 minore di RV per la quantità 4V.

In questo caso; perche i cubi, che sono da NQ fino a DE, devono esser sempre l' uno minore dell' altro, quanto più s' avvicinano a DE, perche sono cubi d' applicata sempre minore; il cubo immediato ad R-4, ch' è il cubo segnato co' numeri 17, 18, e 10, dovrà esser minore di R-4, e perciò sarà 17, e 4; e l'altro immediato, pur minore di quello, e così successivamente; e perciò termineranno tutti nelle porzioni delle linee, che sono segnate col num. 4, di modo che il cubo 7 Y 4 immediato a DE cubo dell'applicata 7 H

mag-

maggiore di DM, farà minore di DE uguale ad 8 unità AB per costruzione, il che ripugna, dovendo ogni cubo intercetto fra DE8, ed NQ27 esser maggiore di DE, e minore di NQ: lo stesso avverrà di tutte le linee cubiche, che sono intercette frà BC unita, e DE8, ambidue cubi per costruzione. Non possono dunque le parallele, o siano le linee cubiche, delle applicate al Rettilineo parabolico, terminare ne fuori, ne dentro le linee CE, ed EQ; dunque tutte le linee parallele, che sono dall' unità BC, fino a DE, e da DE fino ad NQ, le quali terminano alle due linee rette CE, ed EQ, sono cubi delle infinite applicate al Rettilineo parabolico ABCNO.

Tutti i cubi poi sono corrispondenti all' istessa unità AB; perche i cubi intercetti frà DE, ed NQ sendo tanti in numero, quanti sono i punti della DN; e le applicate intercette fra DM, ed NO sendo ancora tante in numero, quanti sono i punti della DN; e li quadrati intercetti frà DF, ed NP sendo pure tanti in numero, quanti sono i punti della DN: ogni cubo sarà corrispondente alla sua applicata, cioè 7 K sarà cubo di 7 H, ed il cubo segnato co' numeri 6, 8 sarà cubo dell' applicata 6 X, perche la BN, porzione dell' asse AN, intendendosi divisa in punti infiniti, frà applicata, ed applicata, frà quadrato, e quadrato, e frà cubo, e cubo, non si potrà intendere veruno spatio per mezzo; e se non vi può essere spazio per mezzo, 7 K non potrà esser cubo dell'applicata DM minore di 7 H, nè dell' applicata 6 X maggiore di 7 H; perche se 7 K fusse cubo dell' applicata DM, sarebbe uguale a DE8, cubo per costruzione di DM2, il che ripugna; e se 7 K fusse cubo dell' applicata 6X, la parallela 6.8 sarebbe cubo dell' applicata successiva; ed alla perfine RV immediata ad NQ27, sarebbe cubo di NO3; così dunque 7 K sarà cubo di 7 H, e lo stesso di tutti gl'altri, e perciò ogni cubo sarà corrispondente alla sua applicata.

Ma le applicate al Rettilineo parabolico ABNO son tutte corrispondenti all'unità AB, dunque anche i quadrati, ed i cubi delle applicate sono corrispondenti all' unità AB; e

lo stesso avviene de'cubi delle applicate intercette frà BC, e DM; dunque tutte le applicate prodotte, o siano le linee parallele, le quali terminano alle linee CE, ed EQ; saranno cubi delle applicate, e saranno alla stessa unità AB corrispondenti, ch'è ciò si dovea dimostrare. Dello stesso modo si dimostra, che i cubi delle applicate intercette frà BC1, e DM2 terminano alla linea retta CE.

CONSIDERAZIONE.

EGli è da considerarsi, che tutto quello, che nell'antecedente Raccolta abbiamo dimostrato intorno alli nostri Rettilinei parabolici piani, a fine di far conoscere, che la Parabola Apolloniana non hà le proprietà, che se le assegnano; si dimostra ancora in questo nostro Rettilineo, nel quale sono i quadrati, ed i cubi delle applicate, per far conoscere, che la Parabola cubica non hà le proprietà, che se l'assegnano; ed a cagion d'esempio.

Nella proposizione, che si legge alla pag. 8. dell'antecedente Raccolta, abbiamo dimostrato, che le infinite applicate, che terminano alla Parabola Apolloniana, devon essere in proporzione aritmetica; e che se non sono in proporzione aritmetica, non son radici. Dimostreremo ora lo stesso de'cubi considerati nella Parabola cubica.

PROPOSIZIONE.

Con la quale si pruova lo stesso in altro modo.

SE i cubi, che terminano alla Parabola cubica, non s'eccedon l'un l'altro in proporzione aritmetica, non possono esser cubi delle applicate, o siano radici.

COSTRUZIONE.

SUppongasi descritto il nostro Rettilineo parabolico piano ABCDE, nel quale AB sia 1, BC1, DE2, ed

AD4,

AD4, e tirata la DF uguale ad AD; poi tirisi l'ipotenusa AF, e prolunghasi la DF fino in G di modo, che sia uguale ad 8 unità AB, e tirisi la retta CG, la quale prolunghisi fino all'asse AD, come per esempio nel punto Z. Poscia descrivasi la Parabola cubica, che chiamano del secondo genere; la quale dovrà passare per i punti A, C, e G; perche A è vertice, e BC unità è cubo, e DG8 è cubo per costruzione: Indi suppongasi la porzione BD dell'asse AD divisa in punti, o parti infinite, e tirati fino al perimetro della Parabola cubica i cubi RH, SL, TN, VP, &c. Dico; che se le applicate all'asse, le quali terminano al perimetro della Parabola cubica, non sono in proporzione aritmetica, non possono esser cubi delle radici.

Tav. III. Fig. XVI.

DIMOSTRAZIONE.

I Cubi, che terminano al perimetro CHG della Parabola cubica, si possono eccedere fra essi in trè modi cioè; o che siano sempre l'uno maggiore dell'altro, ma che le differenze siano sempre una minore dell'altra; o che s'eccedano l'un l'altro con differenze, che siano maggiori della proporzione aritmetica, o con differenze, che siano in proporzione aritmetica.

Fingiamo per primo, che siano uno maggiore dell'altro, ma che s'eccedano con differenze sempre una minore dell'altra, come per esempio, che la differenza fra BC, ed RH sia maggiore della differenza fra RH, ed SL, e che la differenza fra RH, ed SL, sia maggiore della differenza frà SL, e TN, e così sempre: se è così, calinsi le perpendicolari HI, LM, NO, PQ, e così fino all'infinito. In questo caso la linea retta CG verrà divisa in parti sempre una minore dell'altra, e conciò i cubi, che per l'Avversario terminano alla curva CHG, non giungeranno mai nel punto G, termine di DG8.

Fingiamo per secondo, che i cubi s'eccedano con differenze maggiori della proporzione aritmetica, come sono, per esempio, RX, SY, T2, VK. In questo caso un cubo dell'intercetti fra BC1, e DG8, sarà uguale a DG8, o mag-

giore di DG8; perche i cubi intercetti fra BC1, e DG8; supponendosi da noi infiniti, saranno tanti in numero, quanti sono i punti della BD; e se sono tanti in numero, quanti sono i punti della BD, la somma de' cubi intercetti fra BC1, e DG8, i quali s' eccedono l' un l' altro con differenze maggiori della proporzione aritmetica, produrrà il cubo 8 prima di giungere nel punto G: non possono dunque i cubi eccedersi l' un l' altro con differenze maggiori, o minori della proporzione aritmetica, dunque si eccedono nella proporzione aritmetica: Ma le linee parallele, che terminano alla curva CHG, non possono essere in proporzione aritmetica, perche noi abbiamo dimostrato, che le parallele, che sono in proporzione aritmetica, son quelle, che terminano alla retta CG, porzione dell' ipotenusa ZG, dunque i cubi terminano alla retta CG, e non alla Parabola cubica CHG, ch'è ciò si dovea dimostrare.

CONSIDERAZIONE I.

SI vede ancora nella Parabola cubica quello, che abbiamo dimostrato intorno alla Parabola piana; cioè, che se le linee rette AC, e CG fanno angolo nel punto C, ancora la curva ACHG farà angolo nel punto C.

CONSIDERAZIONE II.

SI osserva ancora, che nelle applicate, ne' quadrati, e ne' cubi infiniti, si ritrova, nella proporzione aritmetica, quello stesso, che si ritrova nella geometrica, cioè, che i quadrati, i cubi, e tutte le potenze sono frà loro nella medesima proporzione, che le radici; perche le radici infinite intercette fra BC1, e DE2 sono in proporzione aritmetica, ed i quadrati infiniti intercetti fra BC1, ed DF4, i quali terminano all' ipotenusa AF, sono in proporzione aritmetica, ed i cubi infiniti intercetti fra BC1, e DG8, sono in proporzione aritmetica, e lo stesso avviene in tutte

le

le altre potenze fino all'infinito, come si vedrà in appresso: si deve però avvertire, che ciò avviene nelle radici, ne' quadrati, e ne' cubi infiniti presi in generale, ma non nelle radici, ne' quadrati, e ne' cubi presi in particolare; appunto come abbiamo dimostrato dovere avvenire de' quadrati, e delle radici del nostro Rettilineo parabolico piano.

CONSIDERAZIONE III.

Deve notarsi, che i cubi intercetti fra BC1, e DG8, e l'intercetti fra 8, e 27, e tutti gl'altri sono irrazionali, perche le radici intercette fra BC1, e DE2 sendo irrazionali, come abbiamo dimostrato nell'antecedente Raccolta, i quadrati, ed i cubi devon esser ancora irrazionali: Ed oltr' a ciò devesi considerare, che i cubi intercetti frà BC1, e DG8 non si possono nè meno esprimere in numeri, considerati come lati di triangoli, in quella guisa, che nell' antecedente Raccolta abbiamo dimostrato, che nelle applicate, o sian radici, considerate come lati di triangoli, si esprime in numeri la proporzione, ch' hanno con gl' altri lati de triangoli; e la cagione di ciò è la seguente.

La linea retta CG, la quale è il luogo de' cubi, prodotta cade nel punto Z, punto dell' unità AB, e perciò la retta ZB rappresenta una quantità minore dell' unità, che vale à dire una frazione: Ond' è, che volendosi risolvere i triangoli simili ZBC, ZDG, il lato ZB, ch' è una frazione, ed il lato ZD, ch' è 3, ed una frazione di più, non possono mai dare il numero 8, ch' è un numero intero, quando si fanno i rettangoli de' mezzi, per gl' estremi; e per esempio.

Fingiamo, che ZB sia $\frac{1}{4}$, BC1; sarà come $\frac{1}{4}$ ad 1, così $3\frac{1}{4}$ ad un'altro, e perciò moltiplicandosi 1 per $3\frac{1}{4}$, ed $\frac{1}{4}$ per 8, non si hà in numeri il valore di DG8. All' incontro DG8 è cubo in linea di DF per costruzione, e tutte le parallele intercette frà BC1, e DG8 sono cubi in linea per dimo-

dimostrazione. Vogliamo ora dimostrare ancora brievemente, che le parallele sono cubi, e dimostrarlo per Euclide, e per Archimede in quella guisa, che abbiamo dimostrato, che le applicate sono radici.

PROPOSIZIONE.

Con la quale si prova lo stesso in altro modo.

Tav. III. Fig. XVII.

SE sia dato il Rettilineo ABCDEFG, nel quale, come nella IV. proposizione, sia fatto il Rettilineo parabolico piano ABCDE, il di cui asse sia per esempio, AD4, e sia tirata l' ipotenusa AF, e la linea CG, la quale cada nel punto estremo di DG8, e si supponga la BD porzione dell' asse AD, divisa in punti, o parti infinite; Ed oltr'à ciò, se si supponeranno tirate fuori della BD tante linee rette uguali alle applicate, quanti sono i punti della BD, e si prenderanno le lunghezze delle parallele intercette fra BC1, e DG8 unite con le lunghezze delle applicate, per diametri de' cerchi: Ogn' uno de' cerchi infiniti segherà la retta CG nel punto estremo del diametro; e tutte le parallele intercette fra BC1, e DG8 saranno terze proporzionali delle radici, e de' quadrati.

COSTRUZIONE.

SUppongasi già fatto il Rettilineo ABCDEFG, e l' asse AD del Rettilineo parabolico piano ABCDE, uguale a 4 unità AB, e DG uguale ad 8 unità, e suppongasi tirata la linea retta CG, e l' ipotenusa AF.

Indi suppongasi la BD divisa in punti, o parti infinite, e che BZ immediata al punto B sia una parte indivisibile. Poscia suppongansi tirate dagli infiniti punti della BD, fuori di essa, infinite linee rette uguali alle applicate, come per esempio, DI uguale all' applicata DE2; X.9 uguale all' applicata X.3, Y. 15 uguale all' applicata Y.4, PO uguale a IQ, KH uguale a KL; ed alla perfine Z.7 im-

immediata a BV, uguale a Z.6.

Poi colla linea IDG per diametro descrivasi il cerchio IAG, e colla linea segnata 9.11, per diametro, descrivasi un altro cerchio; Ed alla perfine suppongansi descritti tutti i cerchi infiniti, i quali habbiano, per loro diametri, le parallele intercette fra BC1, e DG8 coll'aggiunta delle applicate tirate fuori, e ciò fino a tanto, che s'intenda descritto il cerchio, che abbia per diametro VC uguale a 2 unità AB. Dico, che i cerchi infiniti segheranno la CG di modo, che le parallele intercette fra BC1, e DG8 saranno terze proporzionali delle radici, e de' quadrati, come per esempio, KN terza proporzionale di HK, ovvero KL, ed AK, e lo stesso di tutte le altre.

DIMOSTRAZIONE.

L'Applicata ID è 2 per costruzione, il quadrato DA è 4, e DG è 8, dunque farà come ID a DA, così DA a DG, e perciò il cerchio descritto col diametro IG passerà per i punti A, e G: Ma noi abbiamo provato nelle antecedenti proposizioni, che le infinite radici intercette fra BC1, e DE2, sono in proporzione aritmetica, e che le infinite parallele intercette fra BC1, e DG8, sono in proporzione aritmetica; dunque gl' infiniti diametri, come sono OS, HN, e tutti gl' altri, sono in proporzione aritmetica, perche se alle parallele intercette fra BC1, e DG8, le quali sono in proporzione aritmetica s' aggiungono le applicate, che sono in proporzione aritmetica, tutt' i diametri, come per esempio, le linee 9.11, 15.17, OS, HN, &c. sono in proporzione aritmetica.

Ma se i diametri infiniti sono in proporzione aritmetica, i cerchi infiniti saranno ancora in proporzione aritmetica; perche, per Archimede i cerchi sono fra essi nella proporzione de' diametri; ma se i cerchi sono in proporzione aritmetica, divideranno la retta CG in parti infinite, e tutte in proporzione aritmetica fra esse, perche, per costruzione i cerchi infiniti termineranno a i punti estremi delle

le parallele intercette fra BC1, e DG8, le quali sono in proporzione aritmetica, a cagione, che terminano alla retta CG porzione dell' ipotenusa TG. Dimostreremo ora, che tutti i cerchi passeràno per il punto A vertice dell'asse AD.

Perche abbiamo dimostrato, che i cerchi infiniti sono in proporzione aritmetica, e che segano la retta CG in parti infinite, e tutte in proporzione aritmetica fra esse; i cerchi saranno tanti in numero, quanti sono i punti della BD porzione dell' asse AD; ma se è così, le infinite porzioni dell' asse AD, come per esempio, AX, AY, AZ, e tutte le altre, fino ad AB unità, saranno mezze proporzionali fra le applicate prodotte fuori della AD, come per esempio, X9, Y15 &c., e le parallele, che terminano alla retta CG, come per esempio, X.11, Y.17, &c. perche se gl' infiniti diametri de' cerchi intercetti fra VC2, ed IG10, sono tanti in numero, quanti sono gl' infiniti quadrati intercetti fra AB1, ed AD4; ed altresì, se le applicate intercette frà l' unità VB, e l' applicata ID2, sono tante in numero, quanti sono gl' infiniti quadrati intercetti fra AB1, ed AD4; e le parallele intercette fra BC1, e DG8, sono tante in numero, quanti sono i quadrati intercetti fra AB1, ed AD4. Negli infiniti quadrati intercetti fra AB1, ed AD4 vi sarà la somma di tutte le mezze proporzionali, che posson essere fra le infinite applicate intercette fra VB unità, ed ID2, e fra le parallele intercette fra BC1, e DG8, perche niuna mezza proporzionale frà le radici 1, e 2, e fra i cubi 1, ed 8, può esser minore di 1, nè maggiore di 4.

Ma se fra i quadrati intercetti fra AB1, ed AD4, vi è la somma di tutte le mezze proporzionali, che sono fra le radici intercette fra BV1, e DI2; e le parallele intercette fra BC1, e DG8: Ogni mezza proporzionale caderà giustamente nel punto del diametro del suo cerchio, come per esempio, AX sarà mezza proporzionale fra l' applicata 9.X, e la parallela X.11; AY mezza proporzionale frà l' applicata 15 Y, e la parallela Y.17, e così successivamente avverrà di tutte le altre, fino al parametro AB.

Fingiamo ora, che un Avversario negasse, che AX fosse

fosse mezza proporzionale fra l'applicata 9.X, e la parallela X.11. Se è così, la mezza proporzionale fra l'applicata 9.X, e la parallela X.11, sarà una linea, o maggiore, o minore di AX, almeno per un punto.

Supponiamo per primo, che sia maggiore di AX per un punto: In questo caso la mezza proporzionale fra l'applicata 9.X, e la parallela X.11 sarà uguale alla mezza proporzionale fra DI2, e DG8; perche noi abbiamo supposto, la DX essere un punto, o una quantità indivisibile; ond'è, che se la mezza proporzionale fra 9.X, e X.11, è maggiore di AX per un punto, la mezza proporzionale sarà AD.

Supponiamo per secondo, che la mezza proporzionale fra 9.X, ed X.11 sia minore di AX per un punto: In questo caso, la mezza proporzionale frà 9X, ed X11, sarà AY; perche noi abbiamo supposto la XY essere un punto indivisibile: ma se è così, la mezza proporzionale fra l'applicata 15.Y, e l'applicata Y.17 sarà minore ancora di AY per un punto, perche se fusse uguale ad AY, la mezza proporzionale fra 15.Y, ed Y17 sarebbe uguale alla mezza proporzionale fra 9.X, la parallela X.11; mentre si è supposto, la mezza proporzionale, fra 9.X, ed X.11, esser minore di AX per un punto, cioè uguale ad AY; e così avverrà fino a tanto, che la mezza proporzionale fra 7.Z, e Z.12, la quale cade nel punto Z, punto immediato al punto B, sarà minore della porzione AZ per un punto; ma BZ è un punto indivisibile, dunque la mezza proporzionale, che cade fra l'applicata 7.Z, e la parallela Z.12 sarà uguale all'unità AB, la quale è mezza proporzionale fra l'unità VB, e l'unità BC, il che è assurdo.

Dunque i cerchi infiniti, i quali hanno per diametro la lunghezza delle parallele intercette fra BC1, e DG8, coll' aggiunta delle parallele intercette fra VB1, e DI2, passeranno tutti per il punto A; e perciò sarà, come OP a PA, così PA a PS; e come HK a KA, così AK a KN, e lo stesso avverrà di tutte le altre: Ma se è così PS sarà terza proporzionale dell'applicata OP, ovvero PQ, e del quadrato AP. KN sarà terza proporzionale dell'applicata KH, ovvero KL, e del quadrato KA, cioè PS, e KN saranno cubi

delle radici OP, ed HK, ch' è ciò si dovea dimostrare.

CONSIDERAZIONE.

ABbiamo dunque dimostrato in tutti i modi, che il luogo de' cubi delle applicate è nelle linee rette, che congiungono per i punti estremi i cubi delle radici di numero intero, come sono, per esempio, la linea retta, che congiunge per i punti estremi li cubi 1, ed 8; e quella, che congiunge per i punti estremi li cubi 8, e 27; e quella, che congiunge per i punti estremi li cubi 27, e 64, e così sempre fino all' infinito.

Ora quì è da notarsi, che questo Rettilineo si puo' considerare, come il nostro Rettilineo parabolico piano, per una curva infinita, il perimetro del quale si compone di linee rette determinate da'punti determinati; perche le linee rette, che si tirano per i punti estremi de'cubi 1. 8. 27 &c. fino all' infinito fanno angolo fra esse, senza mai chiudere spazio; per la qual cosa noi nomaremo in appresso questo nostro Rettilineo, un Rettilineo parabolico cubico, il quale ave le proprietà, che i Signori moderni geometri male a proposito assegnano alla Parabola cubica del secondo genere. Trovato già in questa guisa il luogo de' cubi, proseguiamo a spiegare la nostra Invenzione.

PROPOSIZIONE V.

PROBLEMA IV.

Tav. III. Fi. XVIII.

FRà le due linee rette date QR, ed ST, ritrovare due mezze continue proporzionali.

COSTRUZIONE.

PRendasi AB ugualealla minore data QR, e pongasi per unità, o sia parametro, e descrivasi il Rettilineo parabolico piano ABHCD, il di cui asse AC sia uguale a 9 unità

unità AB, ovvero QR, e facciasi CI uguale ad AC; poi tirisi l'ipotenusa AI, e compiscasi tutta la figura ACFLB, nel modo insegnato nelle antecedenti proposizioni, nella qual figura, le due linee BL, ed LF sono il luogo, dove terminano tutti li cubi delle applicate intercette fra BB1, e GH2; fra GH2, e CD3. Poscia dalla CF prendasi la porzione CV, uguale alla linea maggiore data ST, e dal punto V, alzisi la perpendicolare VE fino al punto E della linea LF, e dal punto E, tirisi la EM parallela, ed uguale a CV. Dico, che le linee MN, ed MP, sono le due mezze proporzionali ricercate fra QR, ed ST.

DIMOSTRAZIONE.

L'Unità AB è uguale alla minore data QR per costruzione, ME è cubo, e le due MN, ed MP sono mezze proporzionali fra AB, ed ME per quello, che abbiamo dimostrato nella Proposizione 4; ma ME è uguale ad ST, dunque le due MN, ed MP, sono mezze proporzionali fra QR, ed ST. Ma se la maggiore data sarà la linea segnata *a*, minore di GL8; allora si prenderà sopra la GL la linea GX, uguale alla linea data *a*, e s' alzerà, come prima, la perpendicolare XY fino alla BL, e dal punto Y si tirerà la linea YZ parallela, ed uguale a GX, ovvero alla linea segnata *a*: Le due mezze proporzionali fra QR, e la linea segnata *a*, saranno ZK, e ZO, che è ciò si dovea fare.

CONSIDERAZIONE.

SE la linea maggiore data ST sarà uguale a CF, allora è manifesto, che le mezze proporzionali sono le due CD, e CI. Ma se la maggiore data sarà maggiore di CF, allora si deve prolungare l' asse del Rettilineo parabolico piano, fino a tanto, che il cubo dell' applicata ultima divenga maggiore della linea maggiore data, come per esempio; se la maggiore data è maggiore di CF27, si prolungherà l' asse del Rettilineo parabolico fino a 16 unità, di modo,

che la sua applicata ultima, sia 4 unità AB, ed il suo cubo 64, e si farà la figura; e lo stesso si farà fino a tanto, che il cubo dell'applicata ultima, divenga maggiore della linea maggiore data, e così fino all'infinito, ponendo sempre la minore data, per unità, o sia parametro, e prendendo, sopra il cubo dell' applicata ultima, la maggiore data.

PROPOSIZIONE VI.

FRa le due linee rette date X, e Z, ritrovare tre mezze continue proporzionali.

COSTRUZIONE, E DIMOSTRAZIONE.

Tav. III. Fig. XIX. POngasi, come nell' antecedente proposizione, AB uguale alla minore data X, per unità, o sia parametro, e facciasi l' asse AD, per esempio, uguale a 4 unità AB, la di cui radice sia DE applicata ultima, uguale a due unità AB. Poi suppongasi, nel modo insegnato nelle antecedenti proposizioni, fatto il Rettilineo parabolico cubico ABCDEFGC, nel quale AB sia unità, DE due unità, AD, ovvero DF, uguale a 4 unità, DG a 8 unità AB, e la retta CG il luogo de' cubi delle applicate. Indi prolunghisi la DG fino al punto H, di modo, che DH sia uguale a 16 unità AB, cioè al biquadrato di 2; e dal punto C al punto H, tirisi la retta CH, e prendasi dalla DH la porzione DY uguale alla maggiore data Z, ed alzisi la perpendicolare YV, fino alla linea retta CH, e dal punto V tirisi la VQ parallela, ed uguale a DY. Dico, che QK, QR, e QS sono le tre mezze proporzionali ricercate, lo che si dimostra, come si è dimostrato de' cubi, nell'antecedente proposizione, perche la linea retta CH è il luogo de' biquadrati, come la linea retta CG è il luogo de' cubi: che sia così.

Se si prende, per esempio, l' applicata segnata L. 10, il suo biquadrato sarà LP; e se non si vuole, che sia LP, ma L. 4 fuori della CH, calata la perpendicolare segnata 4, e 2, e tirata la parallela segnata 12, e 2, la linea 12, e 2 sarà biqua-

biquadrato dell'applicata L. 10, e così successivamente, fino a tanto, che DH16, non farà biquadrato di DE2: dell'istesso modo si dimostra, se si vuole, che il biquadrato dell'applicata L. 10, sia L. 7 dentro della CH. Avendo dunque dimostrato, che la CH è il luogo de' biquadrati, e la QV è uguale alla maggiore data Z, e perciò QK, QR, e QS sono le trè mezze proporzionali, frà l' unità AB, uguale alla data X, e la QV uguale a Z. Dell' istesso modo, che nell' antecedente proposizione, se la maggiore data farà maggiore di DH, si prolungherà il Rettilineo parabolico fino a 9 unità AB, e si farà il biquadrato dell' applicata ultima 3, il quale farà 81 unità AB; e si congiungeranno i biquadrati, tirando la linea retta da C, termine dell' unità, al punto estremo del biquadrato di 3, uguale ad 81 unità AB, e così fino all' infinito, di modo, che il Rettilineo ABCDHC si può chiamare Rettilineo parabolico biquadrato.

CONSIDERAZIONE I.

SI vede chiaramente, che questo Metodo và all' infinito; perche se si vogliono quattro mezze continue proporzionali, si farà il cubocubo dell' applicata ultima, e si tirerà la linea retta, la quale congiunga per i punti estremi l' unità, ed il cubocubo fatto per costruzione: se poi si vorranno cinque, o sei mezze proporzionali, e fino all' infinito, si farà lo stesso, sempre congiungendo per i punti estremi, le unità, li cubicubi, ed i quadraticubi, dell' applicate ultime, fatti per costruzione, e fino all' infinito.

CONSIDERAZIONE II.

IN questo nostro Metodo, il quale và all' infinito, è da notarsi, che non vi è veruna differenza fra il terzo grado, il quarto, il quinto, e tutti gli altri, siccome si esperimenta nel metodo praticato dagli Analitici, nel quale si vede, che tre mezze proporzionali sono lo stesso, che una,

e per-

e perciò è piano, e due mezze proporzionali costituiscono il problema solido; per la qual cosa, altri sono piani, altri sono solidi: Qui all' incontro, quantunque le terze proporzionali siano di differente natura delle quarte, le quarte di differente natura delle quinte, e lo stesso di tutte le potestà, terminando però tutte al luogo della linea retta, colla stessa arte, e facilità, con la quale si prende una mezza proporzionale, se ne prendono due, tre, quattro, e fino all' infinito, per modo, che in questo nostro Metodo non vi è necessità di distinguere i problemi, che rimangono a solidi, da quelli, che si riducono a piani, perche andando tutti al luogo della linea retta, due mezze proporzionali son due, tre mezze proporzionali son trè, quattro son quattro, e fino all' infinito.

PROPOSIZIONE VII.

PROBLEMA V.

Tav. III. Fig. XX.

DAta la linea retta X, sopra della quale si sia fatto un cubo, fare un cubo doppio di quello.

COSTRUZIONE.

FAcciasi la linea Y doppia della linea X, poi prendasi AB uguale alla data X, e pongasi per unità, e prolunghisi fino in D, di modo, che AD sia uguale a quattro unità AB, e prendasi per asse del Rettilineo parabolico piano ACDE: Poscia facciasi il quadrato DF uguale a quattro unità AB, e tirisi l' ipotenusa AF, e facciasi il cubo dell' applicata ultima DE2, e sia DG, uguale ad 8 unità AB, per la Proposizione IV: indi dal punto G termine del cubo DG, tirisi la CG loco de' cubi; e dalla DG prendasi una porzione uguale alla linea Y, questa sarà DE doppia di AB, ovvero X; e dal punto E alzisi una linea perpendicolare a DG fin dove s' incontri colla CG, e sia EM, e dal punto M tirisi la MH, parallela a DG, ed uguale a DE. Dico, che il cubo

cubo fatto ſopra l' applicata HI è doppio del cubo fatto ſopra l' unità AB.

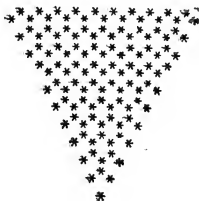
DIMOSTRAZIONE.

PEr quello, che abbiamo dimoſtrato nella quarta propoſizione, tutte le parallele, le quali terminano alla CG, ſono cubi delle applicate; adunque HM doppia di AB, ed uguale ad Y, è cubo dell'applicata HI: ma ſe HM è cubo dell' applicata HI, ſarà ancora quarta proporzionale dell' unità, dell' applicata, e del quadrato, cioè, ſarà come AB, ad HI, così HI, ad HL; e come HI, ad HL, così HL, ad HM. Ed abbiamo per Euclide, che il cubo fatto ſopra la prima è al cubo fatto ſopra la ſeconda, come la prima alla quarta; dunque il cubo fatto ſopra l' unita AB, ſarà al cubo fatto ſopra l' applicata HI, come AB ad HM; e perciò il cubo fatto ſopra HI, ſarà al cubo fatto ſopra AB, come HM ad AB; ma HM ſi è fatta doppia di AB, dunque ancora il cubo fatto ſopra HI ſarà doppio del cubo fatto ſopra AB, che è ciò ſi dovea dimoſtrare.

CONSIDERAZIONE.

SE ſi vuole un cubo, il quale ſia triplo, o quatruplo del cubo fatto ſopra AB, ſi farà ſempre dell' iſteſſo modo; cioè, ſe ſi vuole il cubo triplo, ſi farà la linea Z tripla di X, e ſi ponerà, come prima, la minore data X per unità, e ſi prenderà la parallela NQ, uguale a Z, il cubo fatto ſopra NO ſarà triplo del cubo fatto ſopra AB: e ſe ſi vuole il cubo quatruplo, ſi prenderà la RV, uguale alla linea K quatrupla di AB; e così in ogni proporzione ſino a tanto, che ſe ſi vuole il cubo ottuplo, del cubo fatto ſopra AB, queſto ſarà il cubo fatto ſopra l' applicata DE2; perche come AB1, a DG8, così il cubo fatto ſopra AB1, al cubo fatto ſopra DE2. Se poi ſi vogliono i cubi, li quali ſiano al cubo fatto ſopra AB, in altre proporzioni ſopra l'ottupla, ſi prolungherà l' aſſe AD, e ſi farà tutta la figura, ſiccome

ſi e

si è insegnato nelle antecedenti proposizioni, e si porrà sempre la radice del cubo dato per unità, o sia lato del quadrato, e si farà la linea nonupla, decupla, &c. dell' unità, prendendo sempre l' uguale a quella nella figura, come si è fatto nell' antecedente proposizione. Dell' istesso modo si può fare, considerandosi i biquadrati, i cubicubi, e sino all' infinito; perche per fare un biquadrato doppio di un altro, basta prendere le tre mezze proporzionali, come nella proposizione antecedente, facendo la linea doppia di AB, e trasportandola nella figura biquadrata; allora la linea doppia di AB, sarà quinta proporzionale dell' unità, e dell' applicata, del quadrato, e del cubo; e perciò sarà come la prima alla quinta, così il biquadrato della seconda al biquadrato, che s'intende fatto sopra l' unità, e lo stesso de' cubicubi, quadraticubi, e sino all' infinito.

OBBIEZIONI

FATTE

ALLA DUPLICAZIONE DEL CUBO

Con le Risposte dell'

AUTORE

AVVERTIMENTO.

Uello, che nelle seguenti obbiezioni si deve avvertire si è, che quando i miei Signori Oppositori si ferno incontro alla mia novella Invenzione, molte cose di quelle, che hò dimostrato in appresso, non le aveva ancora dimostrate; ed a cagion d'esempio, io non avevo dimostrato, che la parabola Apolloniana non hà le proprietà, che se le assegnano; con tutto ciò però me ne servij, siccome hò detto nella Prefazione, perche non avevo ancora dimostrato, che le applicate infinite, e che li cubi infiniti devon essere in proporzione aritmetica, e che se non sono in proporzione aritmetica, le applicate infinite non posson essere radici de'cubi, e le parallele infinite, che terminano alla parabola cubica, non possòn essere cubi delle infinite applicate; non avevo dimostrato, che la parabola Apolloniana non puol essere una curva continuata; e finalmente io non avevo dimostrato per la via d' Euclide, e d' Archimede, che le radici, e i cubi terminano necessariamente alle linee rette da me assignate per luoghi delle radici, e de' cubi. Con tutto ciò però io avevo dimostrato, che i cubi non possono terminare in altro luogo, che nelle linee rette da me assignate per luogo de' cubi: per la qual cosa se i miei Signori Oppositori si fussero degnati di considerar la mia Ipotesi, avrebbero certamente conosciuto la verità delle mie dimostrazioni; e se pure avessero voluto rettamente a me opporsi, m' avrebbero solamente richie-

sto, che io provassi, perchè i cubi infiniti sono, e devono essere in proporzione aritmetica; ed io in questo caso averei supplito la mia dimostrazione, siccome poi feci senza esserne richiesto nella proposizione x. del mio Nuovo Metodo ristampato in Anversa l'anno 1715.; e se ciò avesfero essi fatto non avrebbero preso quelli abbagli, che han preso nel modo, col quale si sono a me opposti, ed a' quali la prevenzione di mente suol fare inciampare gl'uomini anche più dotti nelle matematiche, siccome appunto è avvenuto a' miei Signori Oppositori, come si vedrà nelle loro seguenti obbiezzioni.

OB-

OBBIEZIONI

DEL SIGNOR

AGOSTINO ARIANI

Lettore Primario di Matematica ne' Regj Studij di Napoli.

OBBIEZIONE I.

Oiche l' Autore, cotanto mio riverito Signore, per sì efficaci maniere m' obbliga, che Io contro ogni dovere per iscritto dichiari la difficoltà, per suo preciso ed assoluto comando, da me fatta contro al di lui argomento; per mezzo del quale nella proposizione prima della giunta al suo Nuovo Metodo, suppone di dimostrare, che l' infinite parallele alle linee cubiche DE, NQ, terminate dalle CE, EQ, siano eziandio cubi delle corrispondenti applicate della parabola piana ACO: Essendo da così potente comando fortemente costretto a dover obbedire, dico, che la serie delle infinite linee cubiche fra le BC, DE, NQ, (che si suppongono oltre passare, o pure non arrivare alle CE, EQ) quantunque successivamente l' una debba esser maggiore dell' altra (secondo le loro radici, o per meglio dire le corrispondenti applicate all' asse della parabola, l' una sarà maggiore dell' altra) non perciò nel primo caso, nel quale si suppongono oltre passare le CE, EQ, s' inferisca, che la più prossima alla NQ, o alla DE, dalla parte di sopra verso A, divenghi maggiore della NQ, o della DE; e nel secondo caso (nel quale si suppongono non arrivare alle CE, EQ) non per tanto si deduca, che la più vicina alla DE, o alla BC, dalla parte di sotto resti minore della DE, o della BC: Perciocchè dalli punti E, e Q (e così dal punto C) intendendosi le dritte QS, ER, le quali facciano con le DE, NQ dalla parte superiore A, gl'

Tav. IV. Fig. XXI.

gl' angoli acuti RED, SQN maggiori delli CED, EQN; è manifesto, che tutte le infinite parallele predette, che termineranno nelle mentovate linee ER, QS fuori dello spazio CP Q, saranno successivamente una maggiore dell' altra, senza che la più prossima alla NQ, o DE, dalla parte di sopra, sia maggiore di NQ, o DE, ma sempre di questa minore. E nel caso, che si suppongono restar dentro, e non arrivare alle CE, EQ; è chiaro, che possano sempre l' una esser minore dell' altra, senza che la più prossima alla DE, o alla BC, dalla parte di sotto, resti minore della medesima DE, o BC, ma sempre di questa maggiore.

RISPOSTA.

Questo mio stimatissimo Oppositore applica al mio caso una proposizione, la quale niente hà che fare con quello, che hò dimostrato; perchè io parlo de' cubi, o siano terze proporzionali delle radici, e de' quadrati, ed esso parla di linee rette semplici; onde sarebbe stato esso sempre tenuto a dimostrare, che i cubi possono terminare alle sue linee rette ER, e QS; ma se ciò avesse detto, avrebbe preso un grande abbaglio, perche la linea retta ER non può essere il luogo generale de' cubi, mentre l' unità BC, ch' è cubo per costruzione, non può cadere nella linea retta ER, ne in verun' altra linea retta, fuori che nella mia linea retta CE, la quale congiunge per i punti estremi i cubi BC1, e DE8, cubi per costruzione.

Dell' istesso modo la linea retta QS non può essere il luogo generale de' cubi intercetti fra DE8, ed NQ27; perche il cubo DE8 non può terminare alla retta QS; dunque l' opposizione sudetta non fà al mio caso. Da quello, che abbiam detto poc' anzi, si deduce, che il mio Signore Oppositore dovea considerare, che il luogo de' cubi intercetti fra BC1, e DE8, non potea esser mai in altro luogo, che nella mia linea retta CE, o nella parabola cubica del

se-

ſecondo genere, perche queſte ſole ſon quelle, le quali paſſano per i punti C, ed E, punti eſtremi de' cubi 1, ed 8, fatti per coſtruzione; onde giammai ſi potea dire, come ha detto il mio Signore Oppoſitore, che l'iſteſſa dimoſtrazione, colla quale io dimoſtro, che i cubi terminano alla retta CE, vale per dimoſtrare, che terminano alla retta ER; perche nelle parallele intercette fra BC, e DE, le quali terminano alla retta CE, vi puol' eſſere tutta la ſomma de' cubi delle radici intercette fra BC1, e DI2; ma all' incontro nella retta ER non vi può mai eſſere la ſomma delle ſudette radici, mentre non vi è l'unità BC.

Tralaſcio io poi, come ſuperfluo tutto quello, che in riſpoſta a queſta obbiezione ſi legge nel mio Nuovo Metodo riſtampato in Anverſa l'anno 1715; perche avendo io ora dimoſtrato alla propoſizione IV. dell' antecedente Duplicazione del Cubo da car. 66. fino a car. 68, che i cubi devon eſſere in proporzione aritmetica; ed alla conſiderazione prima a carte 68., della medeſima propoſizione IV., che la parabola cubica non può mai eſſer una curva continuata; ed alla perfine avendo dimoſtrato alla medeſima propoſizione IV da car. 70. ſino a car. 73. per la via di Euclide, e di Archimede, che i cubi terminano alla linea retta, che congiunge per i punti eſtremi i cubi 1, ed 8, cioè alla linea retta CE, ſtimo ſuperfluo moltiplicare le riſpoſte, e perciò paſſo alla ſeconda obbiezione.

OBBIEZIONE II.

Del medeſimo Signore.

MA per dimoſtrare con argomento generale geometrico, che quantunque le mentovate DE=8., ed NQ=27. per coſtruzione rappreſentino le quantità cubiche delle loro corriſpondenti radici DI=2. NO=3. ordinate all' aſſe della parabola; non perciò l' altre a quelle parallele terminate dalle CE, EQ, rappreſenteranno i cubi delle loro corriſpondenti ordinate. S' in- Tav. IV. Fig. XXI.

tenda

tenda perciò dal punto C, termine dell' unità BC, la CV parallela all' aſſe AN, la quale tagli dalle ordinate FL, DI, Gr ec., le unità 2M, 4V, 5t, ec. uguali all' unità BC; e ſi conſideri in primo luogo fra la BC, e DE qualſivoglia parallela, come a cagion d' eſempio la FZ tirata dal punto F termine della ſeconda unità dell' aſſe AN, la cui corriſpondente ordinata, o ſia ſuppoſta radice cubica FL ſarà= ♈ 2, ed il ſuo quadrato Fg=2, ed il ſuo ſuppoſto cubo FZ= ♈ 8. Onde ſarà MZ= ♈ 8—1, ed eſſendo DE=8, ſarà VE=7, e così dell' altre parallele: Quindi per la ſimilitudine de' triangoli CMZ, CVE, ſarà CM, CV:: MZ, VE: cioè 1, 3:: ♈ 8—1, 7, e perciò il prodotto degl' eſtremi uguale a quello degl' intermezzi, cioè ♈ 72—3=7, lo che manifeſtamente è falzo.

L'iſteſſo inconveniente ſi caverà in conſiderandoſi in ſecondo luogo qualſiſia delle parallele cubiche fra la DE, ed NQ, come a cagion d'eſẽpio, la parallela GX tirata dal punto 5 termine della quinta unità; Onde ſarà GX= ♈ 125. eſſendo la ſua corriſpondente ordinata, o ſia ſua ſuppoſta radice Gr= ♈ 5; imperciocchè conſiderandoſi dal punto E la ET parallela allo ſteſſo aſſe AN, taglierà queſta dalla GX la parte GH=DE=8, e dalla NQ=27 la parte NT=8, e perciò ſarà HX= ♈ 125—8, e TQ=27—8=19, onde per la ſimilitudine de' triangoli EHX, ETQ eſſendo EH, ET:: HX, TQ, ſarà 1, 5:: ♈ 125—8, 19, ed i prodotti 5, ♈ 125—40=19, o vero ♈ 3125—40=19, cioè una quantità minore di 16=19, il che non è vero.

Il medeſimo aſſurdo s' incontrerà diſcorrendoſi della ſteſſa maniera in tutti i triangoli poſti fra CV, e CE, e fra ET, ed EQ, o pure (nel caſo però, che dall' Autore ſi ſupponeſſero le due CE, EQ come una ſola linea) fra CT, e CQ, in qualunque modo i predetti triangoli ſimili fra loro paragonando; Dunque niuna delle parallele ec. fra BC, DE, ed NQ determinerà la quantità cubica delle corriſpondenti ordinate, ec.

Ne' medeſimi triangoli ſimili ſi puole per altro argomento poſitivo dimoſtrare, le parallele predette non rappreſentar le grandezze de' mentovati cubi; imperciocchè eſſendo CV, CM:: EV, MZ, cioè 3, 1:: 7 $\frac{7}{3}$ ſarà MZ=$\frac{7}{3}$ = 2 $\frac{1}{3}$ e perciò FZ=3 $\frac{1}{3}$ maggiore di ♈ 8, cubo di FL= ♈ 2; e così troverai GX=11 [illegible]

mag-

maggiore di $\sqrt{}$ *125, e tutte le altre parallele non esser le mentovate grandezze cubiche, ec.*

Si nota il potersi fare altre simili dimostrazioni, senza veruno bisogno della parallela CV, ed ET, considerandosi i triangoli simili fra la CK, e CE, o pure (nel caso però, che dall'Autore si supponessero le CE, ed FQ come una sola linea) fra la CP, e CQ, com' è manifesto.

RISPOSTA.

IN questa opposizione il mio Oppositore prende un grande abbaglio, a cagion del quale erra a dirittura contro gl' elementi d' Euclide, ed ecco come. Tav. IV. Fig. XXI.

Esso nomina AF porzione dell' asse AD quadrato 2, ed FL radice di AF la nomina $\sqrt{}$ 2. Ora il quadrato AF non può esprimersi col numero 2, ne con alcun numero, sendo irrazionale, siccome hò dimostrato a carte 14. dell' antecedente Raccolta; ed in conseguenza di ciò FL non è radice di 2. Questa verità è anche manifesta a tutti i geometri; perche quelli ancora, i quali vogliono, che la Parabola Apolloniana considerata come una curva abbia le proprietà, che se le assegnano, non dicono, che i quadrati intercetti fra 1, e 4, sono razionali: Ma permettasi pure al mio Oppositore di nomare AF quadrato 2, ed FL $\sqrt{}$ 2; contutto cio pur erra manifestamente negl'elementi Euclide, ed ecco come.

Esso forma i due triangoli, che nomina simili, cioè CMZ, e CVE, i lati de' quali sono CM 1, CV 3, VE 7, ed MZ, la quale nomina male appropòsito $\sqrt{}$ 8 — 1. Indi forma la sua analogia, cioè, come VC 3 a CM 1, così VE 7, ad MZ, cioè $\sqrt{}$ 8 — 1. Poi moltiplicando i mezzi per gli estremi, cioè VE 7 per l'unità CM, è $\sqrt{}$ 8 — 1 per CV 3, ne nasce la seguente equazione, cioè, $\sqrt{}$ 72 — 3 = 7, e dà ciò conclude, che MZ non può mai esser cubo dell' applicata FL. Ma questa supposizione è troppo manifestamente falsa, e si dimostra chiaramente tale, prima per la XVI del

VI; e poscia a dirittura per la X del X d' Euclide, siccome l'avvertì il Signor Monforte nella sua lettera a me diretta, che si legge alla fine di queste obbiezioni. Mostriamo ora l' abbaglio, che prende contro la XVI del VI d'Euclide.

Se questo mio Oppositore in vece di nomare il lato MZ $\sqrt[3]{8} - 1$, ed in vece di calcolare per Algebra, avesse calcolato per la via aritmetica ordinaria, avrebbe ritrovato, che, anco per li suoi triangoli, niete ripugna, che FZ sia cubo, e termini alla linea retta CE, ed eccone la pruova.

Faccia esso, come VC 3 a CM 1, così VE 7 ad MZ, e troverà, che il valore di MZ è $2\frac{1}{3}$, al quale aggiunta FM unità, tutta la FZ è $3\frac{1}{3}$, la qual cosa niente ripugna al dire, che FZ sia cubo, e che termini alla retta CE: Anzi dippiù, se non avesse errato nel designare col numero 2 il quadrato AF, mi avrebbe additato l' arte per spiegare in numeri i cubi intercetti fra 1, ed 8, ciò che però non può farsi, siccome hò detto. Ecco dunque, ch' erra contro la XVI del VI d' Euclide.

Il Signor Monforte però si sbriga assai più presto di me da questa obbiezione, ed ecco come. L' analogia dell' Oppositore è la seguente cioè; come 3 ad 1, così 7 a $\sqrt[3]{8} - 1$; ma 3 è commensurabile con 1; 7 è commensurabile con 3; e $\sqrt[3]{8} - 1$, ch'è irrazionale, non è commensurabile ne con 7, ne con 3, ne con 1; e per ciò compara una quantità irrazionale con le razionali, ciò ch' è a dirittura contro la X. del X. d' Euclide, come ogn' uno può vedere. Passiamo ora alla seguente obbiezione.

AVVERTIMENTO.

IN LUOGO DI OBBIEZIONE

Di uno Anonimo mio stimatissimo Amico, espressomi nel seguente biglietto da lui inviatomi.

SI priega il Signor D. Paolo a far riflessione, che le prolungate dell' applicare nella Parabola AGFE, fra l' applicata BG2,

BG 2. , e l'applicata DE 3. le radici fra BD , GFE , prolungandosi per quanto contengono i loro cubi , non possono cadere nella linea retta ILM tirata dalla I, termine del cubo 8, alla M, termine del cubo 27, che pervengono dalle loro radici 2, e 3 respettivè. Per dichiarare il proposto , dall' I termine dell' 8 tirisi IN parallela ad AD , sarà IN uguale alla BD 5, lato opposto del parallelogramo; di poi piglisi il quadrato di 2 ½, che è 6 ¼ cadera nel punto C, da C inalzisi CF 2 ½ parallela all'applicata in F, secherà la parabola , per la proprietà della parabola , il quadrato, ec. Tav. IV. Fig. XXII.

Di nuovo CF 2 ½ si cubi, e produrrà 15 ⅝, prolungasi la predetta applicata sino a detto 15 ⅝ in T, questa non cade in MLI, e se cadesse, il triangolo INM saria simile al triangolo IQTL. Dunque come IN5 alla NM 19 residuo di 27 , toltone BI 8, seu DN.) Così IQ 2 ¼ (residuo di AC 6 ¼ quadrato di 2 ½, seu dell'applicata CF, è lato opposto a BC) all'altro lato QTL, che sarà 8 $\frac{11}{20}$. Dunque per la regola delle proporzioni IN5 , NM 19 : : IQ 2 — QTL 8 $\frac{11}{20}$ de' quali proporzionali il rettangolo dell' estremi, 5 per 8 $\frac{11}{20}$ fa 42 ¾ , quanto il prodotto di 19 per 2 ¼.

Ma il cubo di 2 ½ non produce altro, che 15 ⅝ , come di sopra CT, da quali dedottene CQ 8 parallelo a BI , resta QT 7 ⅝ meno di 8 $\frac{11}{20}$ QTL in $\frac{37}{40}$ TL , che è di sotto la linea, che s' era proposto ; e così da mano in mano tutte l' altre applicate alla parabola , de quali i loro cubi sono di sotto la predetta linea ILM per la proporzione triplicata ec. Si tralasciano molte altre cose , che si potriano dire , perche il Sig. D. Paolo è Maestro, e l'applicazione de' negozj de' Poveri m' obbliga a non potere più a lungo distendermi .

RISPOSTA.

QUesto degnissimo Oppositore s'affatica a tutto suo potere d'evitare il meccanico, e non solo cade, come gl' altri, nell'abbaglio di designare le irrazionali con numeri; ma cade necessariamente nel meccanico, ed eccone la pruo-

va. Egli prende in astratto in numeri il quadrato di $2\frac{1}{2}$, ch' è $6\frac{1}{4}$, poscia fà il cubo di $2\frac{1}{2}$, ch' è $15\frac{5}{8}$; indi dice, cada il quadrato di $6\frac{1}{4}$, per esempio, in AC, da ciò n' avviene, che IQ sarà uguale a $2\frac{1}{4}$, IN uguale a 5, NM sarà uguale a 19, e QL uguale a $7\frac{5}{8}$, e con ciò forma i suoi triangoli simili IQL, INM, ne' quali, moltiplicati gli mezzi per gl' estremi, ritrova, che la CL è uguale a $16\frac{1}{2}\frac{1}{8}$; dalla qual cosa conclude, che il cubo di $2\frac{1}{2}$ non essendo altro, che $15\frac{5}{8}$, il cubo dell' applicata CF sarà minore di CL per $\frac{1}{4}\frac{7}{8}$; e che per ciò il cubo di CF sarà, per esempio, CY minore di CL.

Tav. IV. Fig. XXII.

A questo si risponde per primo, che il mio Oppositore non può sapere in qual punto dell' asse AD cada il $6\frac{1}{4}$; perche tutti i quadrati intercetti frà 1, e 4, frà 4, e 9 sono irrazionali: ma a questo risponderà il degnissimo Oppositore, che la sua proposizione è generale, perche in qualunque punto degl' intercetti frà AB4, ed AD9, nel quale si voglia, che cada il quadrato $6\frac{1}{4}$, sempre si ritrova lo stesso. Ma io a questo rispondo, ch' egli è obbligato a determinare il punto, nel quale cade il quadrato $6\frac{1}{4}$, perche se non lo determina, la sua dimostrazione non conclude; e se lo determina, cade nel meccanico, ed eccone la pruova.

Suppongasi, come hà supposto il nostro Oppositore, che AB sia 1, AC4, AN9; e suppongasi fatto tutto il nostro Rettilineo parabolico cubico ABBCSNR; indi suppongasi, per esempio, che il quadrato $6\frac{1}{4}$ preso ad arbitrio sia AH. In questo caso SL sarà $2\frac{1}{4}$, SO, 7, OR, 19, ed LM, $8\frac{1}{2}\frac{1}{8}$ ed HY, $15\frac{5}{8}$; poi s' alzi la perpendicolare YZ, la quale termini alla mia retta SR; io dico, che AG è il quadrato $6\frac{1}{4}$, l'applicata G,20, $2\frac{1}{2}$, ed il cubo GZ, $15\frac{5}{8}$. A questo il mio degnissimo Oppositore dirà, che AH, e non AG è $6\frac{1}{4}$; ed io di nuovo rispondo, ch' egli non può provare, che AH sia $6\frac{1}{4}$, se non dicendo, che l' hà misurata, e se dice, che l' hà misurata, confessa, che la sua costruzione è meccanica; dello stesso modo: se dice, che AG è $6\frac{1}{4}$, e che per ciò il cubo di $2\frac{1}{2}$ è una linea minore

Figura XXIII.

re

re di GZ; di nuovo li rispondo, che alzi la perpendicolare fino alla retta SR, e che il quadrato $6\frac{1}{4}$ cade nel punto dell'asse, ch'è sopra il punto G; e così fò sempre fino all'infinito, e fino a tanto, che mi determina esso il vero punto, nel quale cade il quadrato $6\frac{1}{4}$; ciò che non può in altro modo determinare, che meccanicamente.

In questa opposizione due cose sono degne di considerazione; la prima, che l'Oppositore fà una nuova dimostrazione alla mia proposizione; e la seconda, ch'egli impugna quei geometri, li quali pretendono, che i cubi terminano alla Parabola cubica del secondo genere, ed eccone la pruova.

Egli fà una nuova dimostrazione alla mia proposizione, perche se in vece di fare il quadrato, ed il cubo di $2\frac{1}{2}$, fà il quadrato, ed il cubo di $2\frac{2}{3}$, e poscia lo fà di $2\frac{3}{4}$, e sempre di applicare, che s'avvicinino più ad NQ; si ritrova, che le differenze fra i cubi fatti in numero, e le parallele, che terminano alla retta SR, si diminuiscono sempre, fino a tanto, che le differenze divengono quantità inesprimibili, e poscia nel punto N svaniscono in tutto; per la qual cosa, per lo metodo degl'infiniti ricevuto da tutti i geometri, l'Oppositore hà fatto una nuova dimostrazione alla mia proposizione.

Egli poi impugna le proprietà della Parabola cubica del secondo genere, perche s'egli vuole, che i cubi terminino dentro la retta SR, non posson terminare alla Parabola cubica del secondo genere, la quale, passando per i punti A, B, S, R, passa necessariamente col suo perimetro fuori delle linee rette BS, ed SR. Passiamo ora alla seguente obbiezione.

Illustriss. Sig. mio, e Padrone Colendiss.

Io ho fatto, e farò sempre tanta stima, finche vivo del suo maraviglioso talento, e delle sue dottissime Opere, per le quali si ave acquistata una eterna gloria, ch'ho riputato ardire troppo temerario il credere, che possa solamente in alcuna di quel

quelle esser qualche cosa, che non sia certa, e indubitata verità: hò havuto però qualche scrupolo circa il metodo, ultimamente dato alle stampe, sopra l' invenzione di due, e più m. dic proporzionali continue tra due linee rette date, senza servirsi d' altre curve, che della parabola Apolloniana; e tanto più ho avuta occasione di dubbitare, quanto che lo stesso scrupolo è caduto in mente a persone dottissime della nostra Città; con tutto ciò non ho mai giudicato bene metter la penna in carta per questa facenda, quantunque ne abbia avuto più volte suoi espressi comandi; Ora però, che mi è capitata nelle mani una certa scrittura, nella quale raccogliendo varie difficultà, che le sono state fatte, si è degnata V.S. Illustrissima porre, anche il mio nome (benchè con mio disgusto, e rossore) mi movo a prender la penna, e distendere la dimostrazione, che la linea, nella quale cadono quei suoi infiniti cubi, sia una parabola cubica, e non una linea retta, come ella suppone aver dimostrato. Sia dunque la retta AB asse della parabola Apolloniana AC, il di cui vertice sia A, il parametro la data M, che si ponga per unità, sia proposto di trovar il luogo ADF di modo, che tutte le linee, che s' alzano a perpendicolo sopra l' asse AB, e vanno a terminare nel luogo ADF, siano il cubo corrispondente alla BC applicata alla parabola AF, secondo il senzo di V. S. Illustrissima.

Tav. IV. Fi. XXIV.

Dal punto A, alzisi la perpendicolare AE, e fatta asse questa linea AE, vertice A, parametro M, o unità; si descriva la parabola cubica ADF, di modo che il cubo dell' applicate all' asse sia uguale al solido, che si produce dal quadrato dell' intercetta nel parametro M, dico, che questo sarà il luogo cercato. Sia M = ad a. AB = x. BD = y per la proprietà della parabola Apolloniana AC, il cubo fatto da BC sarà uguale a questa quantità √ a.³ x³, o vero √ x³ ma per la proprietà della parabola AD sarà x³ = a yy, o vero x³ = yy, o vero √ x³ = yy, dunque la retta BD sarà uguale al cubo di BC, la qual cosa dovea dimostrare.

Resterebbe da dimostrarsi il neo, che suppongo essere nella dimostrazione di V.S. Illustriss.ma, ma come che ho veduto esser ciò stato fatto da altri, per ciò non istarò ad incomodarla maggiormente: questo è quanto ho potuto fare, non per altro, che per

ubbi-

ubbidire a suoi sempre da me venerati comandamenti, e devotamente le bacio le mani.

RISPOSTA

QUesto degnissimo oppositore non siegue la mia ipotesi, perche io construisco la parabola nel modo insegnato da Galileo, cioè determinando nell' asse le ascisse 1,4, e 9,&c., e le radici 1,2, e 3,&c. e poscia formo i quadrati 1, 4, e 9, e i cubi 8, e 27 tutti fatti per construzione, e questa esatta construzione è appunto quella, che mi hà somministrato il modo di dimostrare nella mia quarta proposizione, che i cubi dell' applicate intercette frà 1, e 2 terminano alla linea retta, che congiunge per i punti estremi li cubi 1, e 8; dell' istesso modo, che i cubi dell' applicate intercette frà 2, e 3, terminano alla linea retta, che congiunge per i punti estremi i cubi 8, e 27, fatti per construzione; e lo stesso dimostro fino all' infinito, come si puol vedere nella quarta proposizione della mia Duplicazione del Cubo: egli all' incontro descrive la solita parabola cubica, niun conto facendo della mia ipotesi, e della mia construzione, e perciò questa obbiezione non è al mio caso: Oltre che, per poter dire con ragione, che la parabola cubica non hà le proprietà, che se l' assegnano, basta vedere, che io hò gia dimostrato, che il perimetro della Parabola Apolloniana si compone di linee rette determinate da punti determinati, siccome hò dimostrato in tutta l' antecedente Raccolta.

Queste, che io hò narrare, sono le obbiezioni, che ricevè la mia Novella Invenzione subito, che da me fù pubblicata, e queste le risposte, che da me alle obbiezioni si diedero, le quali ancora si leggono nella nuova impressione del mio Metodo ristampato in Asterdam l' anno 1715., e le quali mi sembravano sofficienti ad appagar l' animo de' miei Oppositori, per modo, che si dovessero chiamar soddisfatti, siccome deve esser costume fra' geometri; con tut-

to ciò pubblicorono le seconde obbiezioni. Quale di queste seconde obbiezioni fusse stata la cagione, io non intendo; perche se i miei Oppositori credevano sussistenti le loro prime obbiezioni, eran superflue le seconde; e se conoscevano, insussistenti le prime, doveano da sinceri, quali sono confessare, che erano andati errati nelle prime: cómunque la cosa sia però, è certissimo, che nelle seconde obbiezioni presero nuovi abbagli, siccome si vedrà nelle loro lettere, che sieguono. Ma prima delle accennate lettere, abbiamo fatto imprimere la lettera del celebre Signor Monforte, nella quale, come si vede, egli nota gl' abbagli de'miei Oppositori, ed approva le mie dimostrazioni. Egli è da notarsi però, che nella lettera, che siegue del Signor Monforte, esso suppone un altra dimostrazione da me fatta alla proposizione XII. del mio Novo Metodo stampato in Asterdam l'anno 1715., la quale non hò stimato a proposito di nuovo portarla nell'antecedente Duplicazione del Cubo a cagione, che questa si legge nella Lettera da me diretta al gentilissimo, e dottissimo Sig. Marchese di Salcito: serva però intanto di notizia al lettore, che nell' accennata XII proposizione del Nuovo Metodo io hò dimostrato, che i cubi ancora terminano all' ipotenusa d' un triangolo, la qual cosa il Signor Monforte confirmò per lo mezzo del calcolo analitico nella seguente sua lettera.

AL

AL SIGNOR

D. PAOLO-MATTIA DORIA

ANTONIO MONFORTE.

ON ammirazione, e profitto hò lette, e considerate le dottissime, e sottilissime Vostre Invenzioni, mio stimatissimo Signor D. Paolo, ed hò in quelle ammirato quanto felicemente avete ritrovato, e dimostrato quello, che tanti grandi uomini, i quali nelle dotte antichità fiorirono, han cercato, senza poterlo ritrovare; e spero, che con altri molti ritrovati, de' quali la sua gran mente è capace, non cesserà d'arricchire la Repubblica letteraria. Per le opposizioni poi, le quali mi dice le siano state fatte, forse perchè essendo cose nuove, e lontane da quelle, alle quali semo assuefatti, la preoccupazione opera in noi, che l'estimiamo stravaganti; onde poi nasce la credenza, che non siano vere, e la voglia di volerle oppugnare: e stimo, che si ricorderà benissimo, che quando mi disse, che le applicate alla parabola erano in proporzione aritmetica, io risposi, che ci

aveva molta difficoltà, portandoli per pruova, che se ciò fosse, sarebbe l' istessa cosa parabola, e triangolo; ma poi avendo V. S. dimostrato, come nella parabola, che intende descritta per mezzo di due rette, l' una divisa in parti uguali, che poi secondo la diversa sua lunghezza diviene applicata alli punti dell' altra designati da' numeri impari, la quale diviene asse della parabola, convinto dalla sua dimostrazione restai persuaso, siccom'è succeduto di tutte le altre. E similmente credo, che ad ogn' uno, il quale mettendo da parte ogn' altra preoccupazione farà matura riflessione alla natura della parabola descritta come di sopra, si renderà manifesta la verità delle sue proposizioni.

Ed ancorchè nelle parabole generalmente ogni linea, la quale è mezza proporzionale tra lo parametro, e l' ascissa dell' asse, sia applicata; In questa però (della quale V. S. si serve) vengono considerate quelle applicate sole, che cadono in quei luoghi dell' asse, che sono designati da' numeri impari, li quali ancora sono infiniti, a causa che l' unità, con la quale disegna il parametro puol anche concepirsi divisa in parti indivisibili, come l' istesso parametro in quella espresso; onde è, che le opposizioni fatte sopra altre ipotesi non sono applicabili alla sua, come si vede manifestamente, che servendosi gli Oppositori d'un applicata, che cade nel punto dell' asse segnato dal numero 2., il quale non è degl' impari, ne risulta per applicata $\sqrt{2}$; *e poi seguendo il supposto degli medesimi Oppositori, ne nasce, che li triangoli, li quali si figurano che siano simili, abbiano i lati omologi 1. 3.* $\sqrt{8}-1$. *7., o vero 3. 1. 7.* $\sqrt{8}-1$., *lo che è chiaramente contro gl' elementi della Geometria, come ogn' uno può conoscere dalla dimostrazione della X proposizione del X di Euclide, e tutto ciò nasce dall' aversi scelta tra l' infinite applicate quella, che non conviene alla sua ipotesi per la solutione de' problemi, che si ha prpposti. Per pruova di ciò prendasi l' applicata conveniente alla sua ipotesi, e sia per esempio quella, che si fà al punto dell' asse indicata dal secondo impare 3, la quale è 2, il suo quadrato è 4, onde il cubo sarà 8 in tutto come V. S. dimostra, e sempre si trovano vere le sue proposizioni, quando che prendono l' applicata a i luoghi convenienti. Ne questo parerà strano a' geometri, a' quali è familiare tra gl' infiniti pun-*

punti d' una linea determinar quelli, che vengono a proposito al proposto problema, e tralasciar gl' altri, come inutili: Vedo, che V. S. non ha stimato necessario dover esplicar più minutamente queste cose, supponendo che bastasse il dire, che si serviva della parabola descritta ad imitazione di Galileo, perche quando s' avesse voluto servire differentemente di tutte le applicate, così de'numeri pari, come degl'impari, non aurebbe poste queste differenze, avendo tutte le parabole generalmente le medesime proprietà, come sà ogn' uno versato nella Geometria.

E' similmente ingegnosa, e dotta la risposta, che V. S. ha fatta all' altra opposizione, con la quale si pretendeva provare, che li cubi non potessero terminare nelle rette stabilite per loro limiti, e perciò a loro arbitrio alzavano alcune linee, che facessero angoli acuti con le applicate alla parabola prodotte fino alle linee, termini de' cubi; perchè quando queste linee formano quegl' angoli, che gli avversarj a loro arbitrio vogliono, potrà un' altro dire, che in vece d'angoli acuti li vuole retti, e quando questa linea poi avesse da esser il termine de' cubi, ne seguirebbe, che cubi di radici diverse dovessero essere tra loro uguali, lo che è impossibile. Dunque bisogna, che quelle rette non si piglino à caso, ma debbano passare per li punti stabiliti per i termini de' cubi.

Per quel che altri dicono, che le linee sono linee, le superficie sono superficie, e li corpi corpi, e che V. S. chiamandole tutte linee non faccia bene: mi meraviglio come quel che a Platone, ed a Renato viene attribuito per ritrovato divino, in V. S. sia notato per errore, e sarebbe facile ad ogn'uno, che sà la differenza delle quantità continue, e discrete, attribuendo a quelle l'unità, far che convengano assieme, e così per quadrato non s' intenda altro, che una linea, la quale nella proporzione geometrica cade nel terzo luogo dell'unità, per il cubo nel quarto, e così degli altri soprasolidi usati nell' Algebra, avanzando sempre un luogo secondo le potestà loro crescono.

Con gl' istessi principij ha dottissimamente sciolte tutte le altre opposizioni, che nascono dall' aver quelli fatte le applicate a loro modo, e non secondo la descrizione fatta ad imita-

zione di Galileo, ma da V. S. ridotta a geometrica; considerando l' asse della parabola diviso secondo l'ordine de' numeri impari della unità, e la parallela all' applicate divise in parti uguali, lasciando da parte ogni considerazione de' corpi, e de' loro moti.

Ha piaciuto estremamente agl' amici più intendenti la dimostrazione, che V. S. ha fatta, che le linee cubiche terminano tutte nell' ipotenusa del triangolo rettangolo, il quale ha la base al perpendicolo uguale, appunto come dimostra delle linee quadrate, che non solo terminano all'ipotenusa di un simile triangolo, ma che siano in proporzione arimetica; perchè siccome nella parabola piana il quadrato dell' applicata è uguale al rettangolo fatto dalla porzione dell' asse nel parametro, che V. S. pone esser l'unità, e però la porzione dell' asse, la quale è perpendicolo del triangolo posto uguale alla base, la quale diviene uguale al quadrato dell'applicata, e ciò cammina in tutte le parallele alle base, sino alla cima del triangolo; onde tutte sono quadrati, & in aritmetica proporzione.

Lo stesso è de' cubi, considerando in luogo della parabola piana la cubica, la di cui proprietà è, che il cubo dell' applicata sia uguale al solido fatto dalla porzione dell'asse nel quadrato del parametro similmente preso per unità, e così essendo la porzione dell' asse cubo, anche la base del triangolo a quella uguale sarà cubo, e tutte le parallele alla base terminate dall' ipotenusa saranno cubi, & in proporzione aritmetica, lo che con molta facilità ancora per la via analitica si dimostra; perche essendo il cubo dell' applicata AD, che chiamo X, uguale al solido della porzione dell' asse BA chiamata Y, nel quadrato del parametro aa *preso per unità, avremo la equazione* $X^3 = aa\, Y$, *o vero* $X^3 = Y$; *e perchè la porzione dell' asse, o vero perpendicolo del triangolo è stato fatto uguale alla base AC, sarà anche cubo* X^3 *uguale alla base AC; e perchè il punto B si può pigliare in ogni luogo dell' AB, tutte le parallele alla base, sino alla cima del triangolo, saranno cubi, e in aritmetica proporzione.*

Questa dimostrazione si è fatta per soddisfare anche con il calcolo a quelli, che stimavano impossibile, che i cubi potessero

tessero terminare nell' ipotenusa del triangolo rettangolo, benchè nel suo dottissimo trattato ciò l' abbia spiegato in altro modo.

L' ingegnosissima riflessione, che hà V. S. fatta sù quello; che quando le radici sono in proporzione aritmetica, nella medesima sono le altre potestà, se non che nelle radici ciò si vede nella prima differenza, ne' quadrati nella seconda, ne' cubi nella terza, e così nelle altre, secondo l' ordine de' loro esponenti, che mi ha fatto l' onore inviarmi, ed è, a mio credere, degna, che se ne facesse un trattato a parte, contenendo principj feracissimi d' altre conseguenze ammirabili.

Si potrebbero fare altre curiose considerazioni, ma bisognerebbe uscire da' termini d' una lettera, e formarne un libro intero; per la qual cosa facendo a V. S. riverenza, la priego continuarmi l' onore de' suoi comandi. Nap. 5. Settembre 1715.

OS-

OSSERVAZIONI
SU D'UNA LETTERA
DEL
SIG. ANTONIO MONFORTE,
SCRITTA
AL SIG. D. PAOLO-MATTIA DORIA;

Che leggesi nella nuova impressione del Libro del *Nuovo Metodo Geometrico per ritrovare fra due linee rette date infinite medie continue proporzionali*,

Pubblicato in quest' Anno M. DCC.XV.

DEDICATE

ALL' ECCELLENTISS. SIG. CONTE

VVIRRICO
DI DAUN

Vicerè, e Capitan Generale nel Regno di Napoli, ec.

ECCELLENTISSIMO

SIGNORE.

Sſendoſi dal Sig. D. Paolo-Mattia Doria, Cavaliere d' alto ingegno, e d' ogni ſublime ſcienza e letteratura adornato, in queſt' anno dato di nuovo alla luce delle ſtampe il ſuo libro del Nuovo Metodo Geometrico, *con una Lettera ad Antonio Monforte diretta, per mezzo della quale, con altri ſuoi ritrovamenti, gl' indirizza alcune Oppoſizioni, non già per voler degli Autori, ma per ſuo preciſo impegno fattegli, inſieme con un altra Lettera del detto Monforte in riſpoſta della prima: quantunque a me non mai per natural coſtume ſia caduto nel penſiere di opponermi a chi che ſia, non che al detto Sig. D. Paolo-Mattia, cui tanto per le ſue doti, e letteratura, venero, ed ho in pregio; nulla però di manco, eſſendo ſtati gli Oppoſitori dal detto Monforte malamente interpretati, e dipinti con la mentovata ſua Lettera preſſo de' meno intendenti della Scienza di cui ſi tratta, e per le fortiſſime richieſte, che del continuo da' Curioſi, e dagl' Amatori di coſtal facultà tuttogiorno mi vengon fatte, mi ſon vedu-*

ta in obbligo positivo di pubblicar altresì con le stampe la presente Scrittura, che per adempire all' obbligo, ed all' onore della mia pubblica professione, semplicemente avea formata. Ma perche il Libro del Sig. D. Paolo-Mattia a V. E. fù intitolato unito alla mentovata Lettera del Monforte: convenevole, e necessaria cosa da me si è riputato il dedicare a V. E. medesima le presenti Osservazioni in risposta della sola Lettera del Monforte; acciocche l' E. V. voglia benignamente degnarsi, non solo di condonare il mio inevitabile ardire, ma eziandio di proteggere le giuste ragioni, che mi han costretto ad opponermi con ogni convenevol moderatezza alle proposizioni del Monforte; Credendo fermamente di tradire le chiarissime veritadi d' una Scienza cotanto certa, e dimostrativa, e di arrecare non lieve pregiudicio alla stima, ed al decoro della Cattedra primaria delle nobili e sublimi Matematiche Discipline, cui da tanti anni, comeche immeritevole, hò l' onor di servire ne' Regj Studj di questa mia scienziata, ed onorevolissima Patria, se avessi trascurate queste ragionevoli Risposte, che si sottopongono al dritto Discernimento, ed all' avvedutissimo Senno dell' E. V. a cui protestando la mia più umile divozione mi confermo sempremai.

Di Napoli a' 11. di Novembre del 1715.

Dell' Ecc. V.

Divotiss., ed umiliss. Serv.
Agostino Ariani.

EGli dichiara il Signor Antonio Monforte nel principio della sua Lettera scritta a' 5. Settembre di quest'anno 1715., che leggesi stampata nella nuova edizione del libro del *Nuovo Metodo Geometrico ec.*, che avendo con ammirazione, e profitto lette, e ben considerate le dottissime, e sottilissime invenzioni del Sig. D. Paolo-Mattia Doria: aver questi felicemente ritrovato, e dimostrato il suo *Nuovo Metodo Geometrico per l' invenzione delle infinite medie continue proporzionali fra due linee date*, divisato nel suo Libro dato alla luce delle stampe in questo, e nell' anno passato; ed avendo ciò indistintamente asserito, deve la sua proposizione intendersi generalmente, come generalmente l' Autore intende la sua invenzione, che chiaramente propone, e divisa in tutto il suo libro, e particolarmente nelle *Proposizioni V.*, e *XIII.* della nuova edizione.

Le parole della Lettera nel *I. Articolo* contenute sono le seguenti; *Con ammirazione, e profitto hò lette, e considerate le dottissime, e sottilissime vostre invenzioni mio stimatissimo Sig. D. Paolo, ed hò in quelle ammirato quanto felicemente avete ritrovato, e dimostrato quello, che tanti grandi uomini, i quali nelle dotte antichità fiorirono han cercato senza poterlo ritrovare*. Questa cotanto chiara general proposizione d' approvagione del *Nuovo Metodo ec.*, a se stesso contradicendo, apertamente distrugge affatto il Monforte nell' *Articolo III.* della stessa sua Lettera: come appresso chiaramente dimostreremo.

Nel medesimo *Articolo* della Lettera si dichiara convinto, e persuaso dalla dimostrazione addotta dall' ingegnosissimo Autore del libro : con la quale Questi pretende aver dimostrato, che le applicate all' Asse della Parabola siano in proporzione arimmetica con le seguenti parole; *E stimo che si ricordarà benissimo, che quando mi disse, che le applicate nella parabola, erano in proporzione aritmetica: Io risposi, che ci avea molta difficoltà, portandoli per pruova, che se ciò fosse, sarebbe l'istessa cosa parabola, e triangolo: ma poi avendo V.S. dimostrato, come nella parabola, che intende, descritta per mezzo di due rette; l' una divisa in parti ugnali, che poi secondo la diversa sua lunghezza diviene applicata alli punti dell'altra, designati da' numeri impari, la quale diviene asse della parabola: convinto dalla sua dimostrazione restai persuaso, sicome è succeduto di tutte le altre.* Per mezzo della quale dichiarazione, credendo il Monforte con cautela compiacere all' Autore, manifestamente, a se stesso contradicendo, inciampa in un grave errore; Imperciocchè, quantunque nella parabola si possino considerare infinite applicate all' asse in continua proporzione arimmetica: (come sono quelle, che dipendono da' numeri quadrati dell' asse, secondo viene accennato dal Monforte nell' addotto *Articolo* della sua Lettera; e si puo spiegare; Intendendosi dal vertice della parabola tirata all' asse una perpendicolare, che sia divisa in infinite parti iguali, quantunque minime, per le quali, mediante infinite paralelle al medesimo asse tirate da' punti della detta divisione, si determinano le infinite applicate allo stesso asse: che saranno nell'arimmetica continua proporzione) nulla però di manco da ciò non siegue, che tutte le infinite applicabili al medesimo asse formino un arimmetica progressione; Perciocchè le applicate secondo la divisata arimmetica divisione della perpendicolare, per la natura della parabola, sempre determineranno le porzioni ascisse dell' asse nella ragione de' numeri quadrati 1, 4, 9, 16, ec., della serie arimmetica de' numeri naturali 1, 2, 3, 4, ec.; Onde sempre divideranno l'asse della parabola in parti dissuguali denominate da' numeri impari 3,

5, 7,

5, 7, ec., secondo l' unità della prima parte divisa dell' asse; e per conseguenza stando esse applicate arimmetiche sempre fra loro in dissuguali distanze, da' predetti numeri 3, 5, 7, ec. denominate, (per qualunque nuova divisione infinitamente si possa intendere dell' anzidetta perpendicolare) sempremai chiaramente si possono concepire, fra mezzo le mentovate applicate arimmetiche, altre nuove applicate igualmente dalle prime, e fra di loro distanti, che dividano l' asse in infinite parti uguali, ciascheduna corrispondente all' unità della prima divisione dell' asse; cioè fra la prima, e la seconda applicata arimmetica, se n' intenderanno tre: fra la seconda, e la terza, cinque: fra la terza, e la quarta, sette: e così indiffinitamente secondo l' ordine de' numeri impari seguenti; le quali non mai con l' infinite prime applicate arimmetiche formeranno arimmetica progressione. Conciosiacosachè per potersi dire, che le applicate all' asse della parabola siano in proporzione arimmetica, bisogna provare, che devidendosi l' asse in infinite parti uguali, ancorche minime, onde naschi una infinita arimmetica progressione, tutte le infinite corrispondenti applicate siano in progressione arimmetica (come avviene nel triangolo): locchè è impossibile; perche le dette applicate generalmente essendo le radici quadrate de' respettivi rettangoli formati dalle corrispondenti porzioni ascisse dell' asse per lo parametro; ed essendo questi rettangoli, come le ascisse (considerate come loro basi), che si suppongono in una continua arimmetica proporzione, non mai esse applicate (radici di essi rettangoli, arimmeticamente continui proporzionali) possono formare arimmetica progressione; come generalmente si dimostra nella seguente serie arimmetica, $1a$, $2a$, $3a$, $4a$, $5a$, $6a$, $7a$, ec., (che può chiarmente rappresentare detti rettangoli) le cui radici quadrate, $\sqrt{a}$, $\sqrt{2a}$, $\sqrt{3a}$, $2\sqrt{a}$, $\sqrt{5a}$, $\sqrt{6a}$, $\sqrt{7a}$, ec., non sono in arimmetica progressione; Imperciocche se considerarremo ad arbitrio tre di queste radici ordinatamente, come, a cagion d' esempio, le trè prime $\sqrt{a}$, $\sqrt{2a}$, $\sqrt{3a}$, che supponendosi arimmeticamente proporzionali, sarebbe la somma delle

le estreme uguale al doppio della intermezza: cioè $\sqrt{a} + \sqrt{3a} = 2\sqrt{2a}$ overo: $\sqrt{a} + \sqrt{3a} = \sqrt{8a}$; e per conseguenza i loro quadrati: cioe, $4a + 2\sqrt{3aa} = 8a$; overo $\sqrt{12aa} = 4a$; e perciò $12aa = 16aa$: locche è impossibile. O pure per una piu semplice dimostrazione, si può vedere nelle tre radici tra di loro equidistanti, $\sqrt{a}$, $2\sqrt{a}$, $\sqrt{7a}$, della stessa serie radicale, le quali, in vigor della prima ipotesi, dovendo altresì esser arimmetiche proporzionali, s' avrebbe l'equazione impossibile, $4\sqrt{a} = \sqrt{a} + \sqrt{7a}$; e perciò $3\sqrt{a} = \sqrt{7a}$; cioè $\sqrt{9a} = \sqrt{7a}$. Non sono dunque le radici quadrate d' una serie arimmetica; in continua arimmetica proporzione: ciò che per noi si è proposto dimostrare. Per la qual cosa in questo *Articolo* l' Autore della Lettera, a vista d' una ragione, che dimostra soli casi particolari: cioè esser arimmeticamente continue proporzionali quelle sole applicate ne' termini de' numeri quadrati dell' asse della parabola, essendosi dichiarato convinto, e persuaso d' una falsa Proposizione dall' Autor del libro generalmente conceputa, e pronunziata; come si riferisce in questo *Articolo*, ed altresì generalmente dal Monforte intesa, quando rispose, che ci avea molta difficoltà, inciampa in un manifestissimo errore, così in Logica, come in Geometria: non dovendo per modo veruno indistintamente dichiararsi convinto, e persuaso dalla ragione particolare, che dall' Autore in contrario se gli propose; ma dovea replicare, che per quella restava convinto, e persuaso della proposizione, intesa però, e limitata per dette particolari linee applicate, quantunque infinite possino essere; come evidentemente si vedea dalla dimostrazione, che dall'Autore del Metodo in contrario se gli adduceva: E non concedere indistintamente, per mezzo d' una pruova particolare, come vera, una proposizione generale, a cui poco prima a ragione apertamente si era opposto, e che da noi poco fa generalmente esser falsa si è dimostrata.

Oltra che non senza fondamento potrebbe dirsi, che egli, allor che s' oppose all' Autor della proposizione, non istava ben fondato nelle dimostrazioni, per le quali gli con-

contradisse; perche se fosse stato forte sù la verità di ciò, che si contendea, non si sarebbe con tanta debolezza ritrattato a fronte d'una ragione adattata a casi particolari, (come si è dimostrato) confessandosi cotanto agevolmente convinto, e persuaso.

Non vale adunque il replicarsi peravventura a favor del Monforte: che potendosi concepire l' unità dell'asse, ovver pure l' unità dell' infinite parti iguali della predetta perpendicolare all' asse sempre vie più picciola indeterminatamente, ne naschi che tutte le applicate all' asse della parabola si possino intendere arimmeticamente proporzionali, in vigor delle seguenti parole, che si leggono nel *IV*, *Articolo* della Lettera, cioè; *Ed ancorche nelle parabole generalmente ogni linea, la quale è mezza proporzionale tra lo parametro, e l' asciffa dell' asse sia applicata; in questa però della quale V. S. si serve, vengono considerate quelle applicate sole, che cadono in quei luoghi dell' asse, che sono designati da' numeri impari, li quali ancora sono infiniti, a causa che l' unità, con la quale si disegna il parametro puole anche concepirsi divisa in parti indivisibili, come lo stesso parametro in quella espresso*; Poiche la predetta linea perpendicolare, o sia la mentovata unità, supponendosi come si voglia divisa, e per conseguenza le iguali porzioni dell' asse come si vogliano minime, non mai tutte le applicate della parabola saranno in aritmetica proporzione, ma quelle sole, che dipenderanno da' numeri quadrati delle particelle minime (o siano indivisibili, come al Monforte piace di nominare) dell' asse, che fra di loro sempre sono poste in disuguali distanze denominate da' numeri impari; benche quelle infinite possino essere, e le particelle dell' asse sempre vie più minime per una continua divisione, che si può intendere della sopradetta linea perpendicolare per lo vertice della parabola, o dell' unità del parametro determinato.

E passando ad esaminare per lo loro principal riflesso le poco fa notate parole della mentovata Lettera, e spezialmente ove si legge; *In questa però della quale V. S. si serve* ven-

vengono considerate quelle applicate sole, che cadono in que' luoghi dell' asse, che sono designati da' numeri impari ec. Io senza fallo mi persuado, che quando il Monforte ciò scrisse, volle intendere delle applicate a i punti dell'asse, a'quali vengono a terminare le porzioni ascisse dinominate da' numeri quadrati: cioè le sole applicate nel termine della prima unità, della quarta, della nona, della decimasesta ec., che sono frà di loro distanti per una porzione d'asse denominata da'numeri impari 3., 5., 7., 9. ec., come poco appresso lo dichiara più apertamente nel *V. Articolo*, in cui dice; *Per pruova di ciò prendasi l' applicata conveniente alla sua ipotesi*; Ma se mai cotal credenza egli avesse, oltremodo s' ingannarebbe; Poiche l' Autore del libro, supponendo il suo Metodo generale per l' invenzione di tutte le medie, fra due quali si vogliano linee rette date: (come lo divisa in tutto il suo libro, ed espressamente nelle *Proposizione V.*, e *XIII.* della nuova edizione) Domandandosi, per esempio, le due medie, delle quali in virtù del metodo, una sarà l' applicata all' asse della parabola, e l' altra la corrispondente ascissa, n' avverrebbe, che nel caso, che le due medie siano irrazionali (come accade, quando le date non sono fra di loro come numero cubo a numero cubo) non potersi le due medie irrazionali per lo detto metodo ritrovare; come ne meno si ritrovarebbono le due medie razionali fra due numeri dati, che siano come numero cubo, a numero cubo, che non abbiano per esponenti della loro ragione l' unità ed un intero numero cubico; ma ritrovarsi solamente, o per me' dire, supponersi per lo metodo come trovate le sole due medie razionali fra due date, che abbiano la ragione dell' unità ad un intero numero cubico: cioè le sole razionali fra due linee che abbiano la ragione di 1, a'8: di 1 a' 27: di 1, a' 64, ec., che sono le applicate, e l' ascisse dipendenti da'punti dell' asse 4, 9, 16, ec., che dall' Autore, quantunque infinite si supponghino, vengono stabilite per ipotesi nella costruzione del problema per l' invenzione dell' altre infinite linee cubiche, quadrate, e radicali, fra quelle poste; come a cagion

gion

gion d'esemplo sono quelle, che l' Autore esprime nella suddetta *Proposizione V.* fra la *BC*, e la *DE*: e fra la *DE*, e la *NQ*. Si renderebbe dunque secondo quella limitazione del Monforte non solo oltremodo particolare il Nuovo metodo, ma affatto inutile; perche in vigore di questa dichiarazione, si troverebbono quelle sole medie, che gia nella construzione del problema si son supposte, ed antecedentemente conosciute, e ritrovate per altra strada. Quindi è che l' invenzione dell' Autore dovendosi intendere generalmente per tutte le linee date: come si vede espresso nella citata *Proposizione V.*, e nell' uso di questa nella *Proposizione XIII.*, si scorge apertamente, che il Monforte con le dette parole, con accorta destrezza lusingando, ha voluto distruggere in tutto quel Metodo, e quella invenzione, che poco prima su 'l principio della Lettera espressamente lodando, ed ammirando, come dimostrata avea approvata: riducendola vanamente a trovar particolari medie razionali fra quelle sole linee, che avranno la ragione dell' unità ad un intero numero cubico: dell' unità ad un intero numero biquadrato: ec. Come per esempio, nelle due medie, sono la radice ed il quadrato razionali fra 1, e 8.: fra 1, e 27.: fra 1, e 64: ec.; che dall' Autore non si ritrovano, ma si suppongono nella construzione della sua *Proposizione V.* per fondamento dell' invenzione dell' infinite altre razionali, ed irrazionali. Onde il Monforte con la divisata esclusione, o sia limitazione condanna interamente, e distrugge affatto l' invenzione del Nuovo metodo, del quale Lui, in vigore della sua prima proposizione riferita nel primo Articolo della sua Lettera, dovrebbe aver l' impegno di difendere con aperte, e sode dimostrazioni.

Non si potrà dunque da taluno in difesa del Monforte replicare, che questi non sia cotanto disapprovatore del Nuovo metodo, che non resti il medesimo in piedi per *quelle applicate sole, che cadono in que' luoghi dell' asse, che sono designati da numeri impari, i quali ancora sono infiniti*; Perciocchè rispondendo, si riegherebbe il domandarsi al Mon-

 forte

forte: Se per mezzo di queste applicate sole,benche infinite possino essere,resti in piedi il Nuovo Metodo dell'Autore, e per conseguenza utile, e di qualche vantaggio per l'invenzione delle medie,non dico fra due qualsivogliano rette date (che Lui già esclude dal Metodo, e per conseguenza dalla *Proposizione XIII.*) ma fra le dette particolari applicate ne' luoghi dell'asse, che sono designati da' numeri impari (che Lui acchiude nel Metodo, e nella citata *Proposizione*) E se a tal domanda, rispondendo, dirà, mainò: verrà a contradire a se stesso, ed a ciò, che nel principio della Lettera avea indistintamente approvato per vero e per dimostrato: come generalmente dall' Autore si vede proposto nelle mentovate *Proposizioni V.* e *XIII.*; e se allo 'ncontro dirà, maisì: verrà chiaramente a manifestarsi per poco pratico, per non dir altro, de' modi di conoscere, e ben distinguere le verità, ed i matematici raziocinj: confondendo l' ipotesi con le conseguenze, e le costruzzioni, che si suppongono per la soluzion del problema, con la verità principale, che si propone di ritrovare. Ma essendo egli senza dubbio costretto a rispondere per questa seconda parte affirmativa, restringendo l'invenzione a casi cotanto particolari ed inutili, come di sopra largamente si è divisato (perche altrimenti avrebbe l' invenzion dell' Autore generalmente disapprovata, e non già limitata) mostra senza fallo di non conoscere, e di confondere la costruzione per l' invenzion di ciò che si cerca nel problema, con la cosa principale che per mezzo di quella si va trovanno; errore che da' Scolastici, Petizion di principio vien nominato.

E riflettendo di nuovo, e spezialmente a quelle parole del *IV. Articolo* della Lettera di già addotte, con le quali asserisce, che i luoghi dell' asse designati da' numeri impari siano ancora infiniti: *A causa che l' unità con la quale si disegna il parametro puol anche concepirsi divisa in parti indivisibili, come l' istesso parametro in quella espresso*; Alle quali parole, intendendosi replicato tutto ciò che di sopra con altra occasione contro delle arimmetiche proporzio-

nali

nali applicate alla parabola, si è risposto e ponderato, si soggiunge, domandandosi al Monforte: se supponendosi l'unità, o sia il parametro, ridotta all' ultime parti indivisibili (che Lui nomina) possa mai aver uso nella construzione, e nella soluzion de' problemi, per mezzo de' quali dall' Autore si pretende di trovar medie proporzionali frà due qualsivogliano rette determinate, come di ragion si richiede, e dall' Autore medesimo si dichiara nelle sue proposizioni.

Inferisce finalmente nello stesso *Articolo IV.* dicendo; *Ond' è che l' opposizioni fatte sopra altre ipotesi non sono applicabili alla sua, come si vede manifestamente, che servendosi gli Oppositori d' una applicata, che cade nel punto dell' asse segnato del numero 2., il quale non è degl' impari, ne risulta per applicata* ♈ 2, *e poi seguendo il supposto degli medesimi Oppositori, ne nasce, che li triangoli, li quali si figurano che siano simili, abbiano i lati omologi*, 1, 3, ♈ 8 — 1, 7, *ovvero* 3, 1, 7, ♈ 8 — 1, *locche è chiaramente contro gli Elementi della Geometria, come ogni uno può conoscere dalla dimostrazione della X. Proposizione del X. di Euclide, e tutto ciò nasce dall'aversi scelta tra l'infinite quella, che non conviene alla sua ipotesi per la risoluzione de' problemi che si ha proposti*. Nel qual luogo piu che in ogni altro traluce oltremodo un accortissima destrezza, per non dire malvaggità dell'Autore della Lettera; Poiche con le notate sue parole, credendo far dimostranza di deludere le opposizioni fatte da' primi Oppositori, che nel libro si leggono, peravventura una doppia finissima arte egli usa, con la quale follemente lusingandosi di far credere al vulgo, ed a' meno intendenti, essersi in grave errore dagli Oppositori inciampato, crede il buon Uomo far dimostramento di attribuire a i medesimi un assurdo contro agli Elementi di Euclide; ed in effetto con istudiato artificio, o per me' dire, con poco, anzi niente accorta malizia, viene a proponerlo contro al nuovo metodo dell' Autore, di cui Lui vorrebbe esser riputato difensore, ma non approvatore, over pure esser creduto mallevadore, ma in effetto per modo veruno non esserci; Im-

perciochè l'assurdo, che Lui inferisce contro alla falsa proporzione 1, 3, : : ♈8 — 1, 7 dagli Oppositori come assurda supposta, e riconosciuta: come quella che dipendea da' triangoli, che non possono esser rettilinei, come dall' Autore in virtù della construzione della sua *V. Proposizione* conceder si debbono) lo propone per altro fondamento: cioè contro alla *Proposizione X.* del *X.* di Euclide, o sia per via diversa da quella per la quale si notava dagli Oppositori, che l' inferivano contro alla *Proposizione XVI.* del *VI.* E ciò fà per due maliziosissimi fini. Primo per non comparire contro al suo intento scoverto disapprovatore dell' invenzione del Nuovo metodo, contro del quale veracemente il riferito assurdo (ed altri simiglievoli che inferir si potrebbono) l' Autor della Lettera artificiosamente viene a scagliare: come si scorge apertamente dagl' intendenti. Secondo per dare ad intendere alla turba de' meno intesi di questa Scienza, che lo sbaglio contro di Euclide sia per avventura preso dagli Oppositori, che per mezzo de' triangoli, ch' essi figurano di lati omologi (come Lui dice) incorrano in assurdi; Credendo il mal consigliato dipingergli presso del Vulgo cotanto deboli, che possino errare sù le prime fondamenta di cotal Scienza. Ma costoro, quantunque in cotesta occasione si sien mostrati modesti: perciocchè cotali il loro dovere e la bisogna gli costrigneva) fan sapere al Monforte, che son più forti di ciò ch'ei crede, almeno perche han saputo conoscere il suo debole, così nella presente occasione, come nelle preterite, nelle quali vanamente si è lusingato, che abbian per avventura creduto per nuovi que' ingegnosissimi ritrovamenti, e le magnifiche invenzioni d' egli da molto tempo prima da' loro veraci Autori divulgati Micrometri, e di già molti anni avanti pretese scoperte delle parallassi delle Stelle fisse, e modi da misurar la terra, e i corpi celesti, ed altre dottrine da Lui riferite per avventura come cose nuove; e che abbian ricevuto per utile e vantagevole alla pratica la sua rinomata Trigonomatria *Geometricè exhibita absque usu tabularum*: che non contiene più di ciò che si raccoglie dall'

dall'antica dottrina Geometrica-teorica de i Dati di Euclide, largamente poi divisata dal Gran Francesco Vieta nel *cap.* 19. del *lib.* 8. delle Varie Risposte Matematiche, e da altri Autori: che discendendosi poi alla pratica di determinar per numeri le ragioni degli angoli per la misura de' triangoli (ciò che comunemente vuol dire Trigonometria) per isfuggir l'uso delle tavole, che supponendo il raggio del cerchio diviso in 10000000. parti iguali, oltremodo si avvicinano alla verità delle mentovate ragioni, che quasi sempre sono incommensurabili, si riduce all'antico uso di misurare per mezzo del vulgatissimo quadrato geometrico; nel quale il lato, o sia il raggio del cerchio, che si può intendere, si suppone diviso in 1000. parti iguali: che presso gl' intendenti, vuol dire, servirsi di tavole assai più imperfettissime: come si vede nell' Opuscolo dato alle stampe, non già dall' Autore, ma dal dottissimo Sig. Luca Tozzi nell' anno 1704.

Siegue nel *V. Articolo* con queste parole; *Per pruova di ciò prendasi l' applicata conveniente alla sua ipotesi, e sia per esempio quella che si fà nel punto dell' asse indicata dal secondo impare 3, la quale è 2, il suo quadrato è 4: onde il cubo sarà 8, in tutto come V. S. dimostra, e sempre si trovano vere le sue proposizioni, quandoche prendano l' applicata a i luoghi convenienti*. Con le quali, dubbitando per avventura l'Autor della Lettera, che i suoi giudicj di sopra con idee cotanto fra di loro contrarie, e con istudiate parole pronunziati, non avessero a cagionargli alcun pregiudicio coll' esser riputato scoperto approvator generale del Nuovo metodo; credendo di coprirsi con cautela, si discuopre in questo *Articolo* a tutti manifesto disapprovatore del Metodo generale, ed approvatore evidente in particolare; onde si conferma poco intendente discernitore della construzione, che si suppone per l' invenzione del Metodo, dall'invenzione principale che si propone; dichiarando apertamente in questo *Articolo* sempre vere le proposizioni del Nuovo Metodo; e perciò ritrovarsi, non già supporsi la radice 2, il quadrato 4, ed il cubo 8, che lui adduce a cagion

gion d'esempio: e così dell'altre applicate a' luoghi convenienti dell' asse: come di sopra in risposta del *IV. Articolo* largamente si è divisato.

E lasciando il *VI. Articolo*, nel quale con vane ragioni non lascia d'infingersi affettati, e fallacissimi argomenti, per mezzo de' quali pretende di far credere, che l' Autor medesimo abbia voluto intendere il suo Metodo per le sole ordinate a' numeri impari dell' asse, escludendo tutte le altre applicate a' numeri pari (per servirmi della sua frase): cosa, che non mai esso Autore si ha potuto immaginare, o giammai ha potuto aver in animo di dover dire, fo passaggio all' altro *Articolo* della Lettera.

Nell' *Articolo VII.* si legge così; *E' similmente ingegnosa e dotta la risposta, che VS. ha fatto all' altra opposizione con la quale si pretendea provare, che li cubi non potessero terminare nelle rette stabilite per loro limiti, e perciò a loro arbitrio alzavano alcune linee, che facessero angoli acuti con le applicate alla parabola, prodotte sino alle linee, termini de' cubi; perche quando queste linee formano gl' angoli che gli avversarj a loro arbitrio vogliono, potrà un'altro dire, che in vece d'angoli acuti li vuole retti; e quando questa linea poi avesse da essere il termine de' cubi, ne seguirebbe, che cubi di radici diverse, dovessero essere tra loro uguali, lo che è impossibile. Dunque bisogna, che quelle rette non si piglino a caso, ma dobbano passare per li punti stabiliti per i termini de' cubi.* O quante belle riflessioni potrebbon farsi contro alla graziosa difesa, che il Monforte in questo *Articolo* si è studiato di fare, non sò se contro agli Oppositori ovver pure contro a se stesso. Basterà per ora il replicarsi che se un' altro alla supposizione arbitraria, o sia geometrica construzzione degli Oppositori(con la quale mediante l'angolo acuto, che geometricamente s'intende descritto, discuoprono la fallacia dell' argomento della *Proposizione V.* dell'Autore) rispondendo non volesse le notate linee che facciano angoli acuti con le applicate allungate ec., ma che con queste formino angoli retti: si direbbe esser Costui un innocente, per non dire indotto dell'arte di argomentare in Geometria:

tria : e che perciò erri in Logica, ed in Matematica: e che non sappia ancora che le construzioni in Geometria (purchè non siano impossibili)per le quali si cerchi di dimostrare una verità, o una falsità nascosta, sieno, a guisa de' mezzi termini, riserbate al soloarbitrio di chi argomenta, indrizzate al solo fine, che si cerca; e che in cotal forma opponendosi, sia lo stesso, che opporersi a tutti i Matemateci, fino allo stesso Euclide nella maggior parte de' suoi Teoremi, ne i quali per dimostrare le verità, che in quelli propone, si avvale di particolari ed arbitrarie construzioni; Come a cagion d' esempio, tralasciando infinite altre, nella *Proposizione 32.* del 1. *libro* degli *Elementi*, nella quale Euclide, volendo dimostrare che in ogni triangolo, gli angoli insieme siano iguali a due angoli retti, taluno gl' impedisse, o gli turbasse la construzione, che antipone per far chiara la sua dimostrazione (nella quale a suo arbitrio, vuole, che si tiri da uno degli angoli del triangolo una parallela al lato opposto (dicendogli, non volerla altrimenti parallela, ma obbliqua al lato predetto ec. Si dimanda al degnissimo Autor della Lettera, che cosa a costui giammai risponderebbe? Certamente, che chi risponde in cotal forma sia poco pratico in Geometria, e che non intenda il modo, e le fondamenta di argomentare non solo in Matematica, ma in tutte le Discipline, nelle quali si tratti di scoprire un errore, o una verità nascosta di che che sia. Errò dunque il Monforte in Logica, e spezialmente nelle fondamenta di ragionare in Geometria, quando, simiglievoli opposizioni inventando, scrisse cotesto *Articolo* della sua Lettera; e ciò non si dice autorevolmente nelle brigate ove non sia professore, che ascolti: come tal volta il Monforte censurando si fe sentire: ma costantemente si scrive agli intendenti: Or questo sì che potrebbe dirsi errore contro degli Elementi della Geometria, e non già il decantato assurdo, peravventura figurato, preso dagli Oppositori contro la *Proposizione X.* del *l. X.*

L'*Articolo VIII.* seguente, che comincia; *Perquel ch' altri dicono ec.*, contenendo ragionevoli risposte ad Opposizio:

fizioni d'Altri, non mai da' primi Oppofitori intefe, non che approvate, fi paffa al feguente *Articolo*.

Nell' *Articolo IX.* fi legge: *Con gl' isteffi principj ha dottiffimamente fciolte tutte le altre oppofizioni, che nafcono dall' aver quelli fatte le applicate a loro modo, e non fecondo la defcrizione fatta ad imitazione di Galileo, ma da V.S. ridotta a Geometrica, confiderando l'affe della parabola divifo fecondo l' ordine de' numeri impari dell' unità, e la paralella all'applicate divife in parti uguali, lafciando da parte ogni confiderazione de' corpi, e de' loro moti*. Il Monforte, avendo di già negli *Articoli* antecedenti con la detta fua limitazione diftrutta affatto tutta l'invenzione del Nuovo Metodo, come di fopra fi è dimoftrato, dichiara su'l principio di quefto *Articolo*, fciolte tutte le altre Oppofizioni; e ciò fecondo il divifato fuo parere, da noi non fi niega; Poiche in vigore della fua limitazione, non reftando in piedi per niuna parte il Metodo, manca per confeguenza agli Oppofitori, ed alla contefa, il foggetto di cui fi tratta.

Siegue poi nel medefimo *Articolo*, dichiarando, la parabola del Galileo dall'Autore del Metodo efferfi ridotta a Geometrica; Suppone dunque la prima effer meccanica, e la feconda Geometrica, avvegnachè defcritta ad imitazione della prima; e la ragione, che ne adduce fi è: che quella del Galileo dipenda *dalla confidirazione de' moti de' corpi*, e quella del Nuovo Metodo dalla *confiderazione dell'affe della parabola divifo fecondo l' ordine de' numeri impari dell' unità, e della parallela all' applicate divife in parti uguali*: come in quefto *Articolo* fi legge: benche l' Autore nella I. Propofizione del fuo libro la confideri eziandio defcritta dalla confiderazione de' moti de' corpi. Nel qual luogo, rifpondendo, fi nota, che le mentovate parabole effenzialmente convenghino nell'invenzione della lor defcrizione, e per confeguenza nella lor perfezione; Perciocchè per l' uno e per l'altro modo igualmente fi vengono a ritrovare infiniti punti, che appartengono alla parabola geometrica Apolloniana: come dal Galileo medefimo fi dimoftra nella Propofizione prima del Dialogo IV. delle Nuove Scien-

ze;

ze ; onde l'abbaglio del giudicio dipende dal ſupponere l' Autor della Lettera , che la prima , intendendoſi deſcritta dalla conſiderazione de' moti de' corpi , ſii meccanica, e la ſeconda per via d'interſecazione di linee rette, divenghi geometrica ; quando per via dell' una e dell'altra deſcrizione , che ſemplicemente ſi conſidera, e s'intende con chiarezza , ſi conſeguiſce ugualmente lo ſteſſo effetto dell'invenzione degl'infiniti punti appartenenti alla parabola geometrica , mediante la conſiderazione , nell uno e nell'altro modo , uſata dell'interſecazione delle tante volte mentovate linee perpendicolari ed applicate tirate ec., che dal Galileo s'intendono geometricamente deſignate per determinare le direzioni , e le quantità de' moti , de' tempi, de' ſpazj ec., per le ſue ammirabili ſpeculazioni intorno al moto: come ſi può riconoſcere nel luogo ſopracitato, ed altrove. Senzachè ogni linea geometrica , nella ſua invenzione , ſi deve intendere come deſignata , o prodotta da moti de' punti geometrici, che ne' corpi ſi poſſono ad arbitrio conſiderare .

Si da finalmente termine alle Oſſervazioni sù queſta Lettera ; facendo una ſola rifleſſione ſopra tutti gli *Articoli*, che rimangono; cioè, che lo Scrittore di eſſi, moſtrando che tutti i cubi dell' ordinate alla diviſata parabola cubica, il cui parametro ſia preſo per unità , ſiano in arimmetica proporzione , ha voluto per avventura con artificioſa induſtria dar' un ſaggio a' Profeſſori ,che Lui , conoſcendo i veri luoghi del propoſto Problema delle medie continue proporzionali fra due linee date , con la ſua Lettera non abbia potuto generalmente approvare il Nuovo Metodo, come per utile,e per vero l' avea approvato ne' diviſati caſi particolari, ne' quali Egli hà certamente errato , come parimente in più d' un' altro luogo è caduto in errori , ſecondo ciò , che di ſopra con evidenza largamente ſi è dimoſtrato .

In Napoli 11. di Novembre 1715.

AVVERTIMENTO

Il Signor Ariani nell' antecedente ſua Lettera cita le propoſizioni V, e XIII. dell' Autor del Metodo; ed il Signor Bonelli nella ſeguente Riſpoſta fà molte citazioni di propoſizioni, e di pagine del medeſimo Autore, le quali tutte ſi devono intendere del Nuovo Metodo ſtampato nell' anno 1715.

RIS-

RISPOSTA
DI
PAOLO BONELLI
PROFESSORE DI MEDICINA

Alle osservazioni fatte dal Signor Agostino Ariani sù d' una Lettera del Signor Antonio Monforte.

Gli sarebbe cosa certamente convenevole molto al decoro di questa Città di Napoli sempre, e in ogni tempo madre feconda di dottissimi, e virtuosissimi uomini, se vedendosi comparire in pubblico una scrittura, quanto è quella, pochi giorni sono data alle stampe dal Signor Agostino Ariani; nella quale con modi, e con arte non solita usarsi da ben costumati uomini, tenta oscurar la stima, che i Signori Luca Tozzi, ed Antonio Monforte, mercè le loro virtuose Opere s'hanno acquistata, ch' ogni buon cittadino si alzasse a reprimere il suo troppo ardire. Laonde, perche io mi vanto del titolo di Scolare di questi Signori non hò potuto in ciò raffrenare il mio zelo, nulla curando l'indignazione, che i sudetti Signori prenderanno contro di me, sdegnando forsi, che alcuno prenda la lor difesa; hò dato di mano alla penna per isvelare non solamente i gravissimi errori in Geometria, ne' quali l'Ariani cade in ogni proposizione, ch' assume in quel suo scritto; ma per convincerlo altresì di mensogna in tutte le cose, ch' asserisce contro le degnissime Opere, e contro la conosciuta sincerità del Signor Monforte.

Questo pubblico professore sdegnato, non a ragione, perche 'l Sig. Monforte lo hà in una sua Lettera diretta al

Sig. D. Paolo-Mattia Doria *Autore del Nuovo Metodo, ec.* ultimamente dato alla luce accusato d' avere nelle sue obbiezioni a quello fatte, errato direttamente contro gl' elementi della Geometria, si sforza a tutto suo potere di nasconder sotto le tenebre di finte accuse, che dà al Signor Monforte, i suoi troppo manifesti errori: e non s' avvede il misero, che fà come l' ucello, che batte le ale nel vischio; perche tentando di nascondere un suo errore, inciampa in infiniti altri; e procurando di porre avanti gl' occhi del vulgo la polvere a fin che non vegga la sua ignoranza, cadendo in infinite contradizioni ne' suoi assunti, la fà più chiara, e manifesta.

Vorrebbe egli, che 'l vulgo si persuadesse di leggieri; che 'l Signor Monforte con arte soprafina lusinghi l'Autore del Nuovo Metodo, mentre che ne conosce l' insussistenza; e ciò perche, sapendo ben egli di quanto peso sieno le approvazioni d' un tant' uomo, non sà, quando confessa, che 'l Sig. Monforte veramente l'approva, come giustificarsi con coloro, co' i quali con tono magistrale lui, ed altri hanno asserito, che l' errore nell' Opera dell' Autore si conteneva era sì chiaro, ed evidente, come chiaro, ed evidente è l' errore di chi dicesse 2, e 3 fan 7.

All' incontro poi vedendosi chiaramente nella lettera del Sig. Monforte, ch' egli non lusinga l' Ariani intorno all' errore manifesto, che hà preso contro gl' elementi d' Euclide: è di mestieri dice l' Ariani frà se stesso, di far credere, che 'l Monforte non hà inteso le proposizioni dell' Autore del Nuovo Metodo; e nulla pensando, che inciampa in una contradizione chiara agl' occhi d' un fanciullo; lo desidera lusinghiere in ver l' Autore; e si sforza di farlo comparire nello stesso tempo ingannato dallo stesso Autore.

In fine lo vuole ora ingannato, or condescendente, secondo che li viene in acconcio a' suoi fini; fini fra loro tanto discordi, e ripugnanti, che non può mai accordarli; e ciò vanamente tentando non s' arrossisce di tacciar le Opere d' un tanto uomo, quanto è il Sig. Monforte, e quelle tacciando offendere insieme la stima del Sig. Tozzi, uomo

uomo tanto celebre per le sue virtù, e per le cariche da lui occupate, facendolo reo d' aver pubblicato la Trigonometria *absque usu tabularum* del Sig. Monforte, e che al suo dire, era un opera tolta da Vieta. Noi all' incontro in questa Scrittura più sinceramente operando, e più giusto metodo, che lui seguendo, dimostreremo con evidenza, che 'l Signor Ariani in quella scrittura da lui fatta si è dato a divedere poco intelligente nella Geometria, che professa, e falso accusatore degl' uomini onorati, dotti, e nell' Europa intera celebri, e ben conosciuti; siccome del Sig. Monforte particolarmente dà testimonianza il Sig. D. Giacomo Capecelatro degnissimo Castellano del Castello dell' Uovo, e Cavalier d' alta stima, e mio gran padrone, che stando sopra l' armata Inglese nel tempo, che militava nella Spagna, tutti quei officiali l' addimandavano se conosceva il Sig. Monforte, e con ammirazione ascoltavano, ch' egli non conoscesse un uomo, ch' era più celebre in Londra, e in tutte le parti del Settentrione, che nella Italia stessa. Adunque ritornando al nostro proposito dimostreremo, che l' Ariani si è dato a conoscere niente inteso delle cose geometriche, e di costume poco onesto in ciò che riguarda la morale. E perche l' accuse, ch' egli dà al Sig. Monforte son la maggior parte contro l' approvazione, ch' egli hà fatto del Nuovo Metodo: noi seguendo l' ordine, ch' egli stesso hà tenuto, cominceremo l' esame delle sudette accuse dal principio della sua Lettera.

In tutta la sua lunga diceria, che comincia dalla pagina prima, e finisce alla pagina 8 il buon professore si sforza dimostrare, che 'l Signor Monforte abbia ammessa senza ragione una proposizione falsa per sua natura, la quale è la VI. e l' XI. Proposizione dell' Autore del Nuovo Metodo, dove dimostra in diversi modi, che le infinite applicate alla parabola sono in proporzione aritmetica; e si affatica di dar ad intendere, che 'l Signor Monforte non approva in tutto, ma limiti in certi casi particolari il Metodo dell' Autore; e per far credere ciò, dice; *che quantunque sia vero, che nella parabola si possano considerare infinite*

te applicate all' asse in continua proporzione aritmetica, come son quelle, le quali dipendono dalla perpendicolare tirata all' asse del vertice della parabola; non perciò da questo ne adiviene, che le infinite applicate alla parabola siano in proporzione aritmetica.

Ond'è che, al suo dire, il Signor Monforte hà ammesso per generale, una proposizione particolare: Imperocche, benche nella parabola AME, vi sieno tante applicate in proporzione aritmetica, quante sono le parti della KX, le quali ancora saranno infinite, perche la KX s' intende divisa in parti infinite; non perciò da questo si deduce, che le applicate infinite alla parabola siano in proporzione aritmetica generalmente; perche, oltre a quelle infinite, ve ne sono, al suo dire, altre infinite; e perciò accusa il Sig. Monforte d' aver ammessa una proposizione particolare per generale; e la ragione per la quale, a suo credere, ve ne sono altre infinite è la seguente.

Tav. IV. Fi. XXVI.

Se le ascisse dell' asse sono nell' ordine de' numeri impari cioè 1, 3, 5, 7; e le applicate, o siano le radici, nell' ordine de' numeri pari 1, 2, 3, 4; e sempre dividendosi quanto si voglia l' asse, ed il parametro in parti infinite, si potranno sempre intender altre applicate di mezzo, cioè, che fra 1, e 3, per esempio, vi sia sempre il 2, fra 3, e 5, vi sia il 4; e così sempre; per la qual cosa giammai si puol venire all' ultima divisione dell' asse, e del parametro: ond' è che mai la parabola si puol intender tutta ripiena d' infinite applicate, e da questo ne deduce, che 'l Sig. Monforte abbia ammessa una proposizione generale ch' al suo dire, è particolare; così dic' egli nella pagina 2, dove comincia: *Per mezzo della qual dichiarazione, credendo il Monforte con cautela compiacere all' Autore*; e fino al principio della pagina 3, dove finisce con dire: *Fra la prima, e la seconda applicata aritmetica se n' intenderanno 3: fra la 2, e la 3, 5: fra la 3, e la 4, 7: e così indefinitamente secondo l' ordine de' numeri impari seguenti, le quali non mai con le infinite prime applicate aritmetiche formeranno aritmetica progressione*.

Ora il buon Professore non vede, che da questo suo

tor-

torto raziocinio ne nasce conseguenza tutta contraria a quella, ch' esso ne deduce; perch' egl' immagina dedurne, che tutte le infinite applicate alla parabola non possan essere in proporzione aritmetica, e quello che se ne deduce si è, che la sua proposizione repugna ad Apollonio, al Metodo degl' indivisibili, ed a Galileo.

Ripugna al Metodo degl'indivisibili; perche se è vero, com' Egli dice, che sempre si possano intendere altre applicate di mezzo fra le impari, mai si puol giungere all' ultima divisione nell'asse, perche alla fine le applicate infinite son quelle, che dividono l' asse in parti infinite; e se queste non possono occupare tutti i punti dell' asse, l' asse non si puol mai intender diviso in parti infinite; dunque una linea retta non si puol intender divisa in parti infinite, ciò che ripugna al metodo degl' indivisibili, nel quale si vuole, ch' ogni linea retta terminata si possa intender divisa in parti infinite.

Ripugna ad Apollonio, perche se l' asse non si puol dividere in punti infiniti, mentre sempre vi rimangono punti fra gl' impari, da' quali si potranno intender tirate altre applicate; dunque da ogni punto dell'asse non si puol effettivamente tirare un applicata, la quale sia media fra l' ascissa, e l' unità, come vuole Apollonio.

Ripugna a Galileo, perche se da ogni punto dell'asse non si puol tirare un applicata, la parabola construita nel modo di Galileo, non è parabola: si vede da tutto questo che 'l buon professore non intende Apollonio, ne Galileo, ne il Metodo degl' indivisibili, ne la natura dell' infinito; perchè se la intendesse averebbe veduto, che nell' infinita divisione dell' asse, e del parametro, anco secondo l'ordine de' numeri pari, e de' numeri impari, svaniscono le differenze fra gl'impari, e li pari siccome insegna Galileo, e siccome hà insegnato l'Autore del Metodo nella considerazione prima, alla sua prima proposizione.

Si vede poi, ch' Egli non hà inteso l'Autor del metodo, perchè asserisce con una franchezza d'animo a lui solita, che non si puol provare, che dividendosi l'asse in infi-

infinite parti uguali, ancorche minime, le applicate fiano in proporzione aritmetica, quando l'Autore lo hà provato nella VI. Propofizione, dividendo la linea AG perpendicolare ad AD; e nell' XI. Propofizione, dividendo l'affe AG in infinite parti uguali, com'egli vuole, ed egli lo dice con le feguenti parole alla pagina terza. *Conciofiacofache per poterfi dire, che le applicate all' affe della parabola fieno in proporzione aritmetica, bifogna provare, che dividendofi l'affe in infinite parti uguali, ancorchè minime, onde nafchi una infinita aritmetica progreffione, tutte le infinite corrifpondenti applicate fieno in progreffione aritmetica (come avviene nel triangolo) lo che è impoffibile.*

La dimoftrazione poi, ch' egli fà di quefta fua pretefa impoffibilità è tutta falfa, a cagion che fi oftina a voler prendere in numero i quadrati intercetti fra quelli, che nafcono dalle radici de'numeri impari, cioè fra 4, e 9; fra 9, e 16; e che fia così Egli dice. *Come generalmente fi dimoftra nella feguente ferie aritmetica* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, *&c. che puole chiaramente rapprefentare detti rettangoli.*

Ora ciò egli facendo altra cofa non fà, che prendere un altra volta in numero i quadrati intercetti fra quelli di radice razionale; perchè quantunque egli li difegni con la lettera A, con tutto ciò non fono altro, che rettangoli 2, e 3, efpreffi in numero, i quali rettangoli fono gl' intercetti fra 1, e 4; ciò che non puol fare, perchè i rettangoli intercetti fra 1, e 4, non fi poffono efprimere in numero, fenza mutare il parametro, come hà dimoftrato l'Autore alla confiderazione prima della prima propofizione: Dica egli dunque 1, 4, 9, 16, e vedrà, che le radici fono in proporzione aritmetica, cioè 1, 2, 3, 4. Pofcia legga l'XI. Propofizione dell'Autore, e vedrà, che le applicate intercette fra 1, 4, 9, 16, confiderate in linea, e non mai in numero, fono in proporzione aritmetica.

In fomma quella fua vana pompa di calcolo analitico da lui non intefo, non prova cofa alcuna contro l'Autore, ed è affatto vana, perch' è in tutto diverfa dall'ipotefi dell' Autore, il quale non prende in numero i quadrati, ne le

radi-

radici intercette fra quelle di numero pari: Ma acciò egli si persuada d' avere asserita una falsa proposizione, quando ha detto, che dividendosi l' asse in infinite parti uguali, benchè minime, tutte le infinite applicate corrispondenti non posson essere in proporzione aritmetica; li farò vedere, ch' anche dividendosi l'asse AF, ovvero la porzione di esso, cioè BF, in parti infinite, si dimostra, che la linea KX viene divisa in parti infinite, giusto come dividendosi la KX in parti infinite, la porzione BF dell' asse AF viene divisa in parti infinite; e che tutte le applicate all' asse sono in proporzione aritmetica; donde il buon Professore potrà apparare, che la sua proposizione, cioè, *che divisa la KX in parti infinite, sempre si possono intendere altre applicate fra quelle*, sia vana, e falsa.

PROPOSIZIONE

SE la porzione BF del parametro AB della parabola ADE s' intenda divisa in parti infinite; le applicate intercette fra BY unità, ed FE saranno in proporzione aritmetica. Tav. IV. F. XXVI.

COSTRUZIONE, E DIMOSTRAZIONE.

S'intenda dal vertice A tirata la AX, uguale a 3 unità AB, e perpendicolare all' asse AF; e dal punto immediato al punto B s' intenda tirata un applicata fino alla parabola, e ciò può farsi per Apollonio: e dal punto d' essa applicata s' alzi una perpendicolare fino alla AX; e ciò si può fare per l' assioma d' Euclide.

Questa perpendicolare terminerà in un punto della AX dopo il punto K, termine dell' unità AK: e lo stesso intendasi fatto di tutte le applicate, che partono da i punti della BF, cioè da i termini delle infinite applicate. Dunque alla linea KX porzione dell' AX termineranno infinite parallele perpendicolari ad AX, e tutte termineranno in punti, l' uno dall' altro diversi, perche le perpendicolari

fono fra loro parallele; adunque la linea KX farà divifa in parti infinite dalle dette perpendicolari, perche le parti infinite della KX faranno tante, quante fono le infinite parti nelle quali s' intende divifa la BF: ma fe è divifa in parti infinite, è anche divifa in parti uguali, perche fe una parte foffe maggiore dell' altra, farebbe anche divifibile in altre parti, e perciò la KX non farebbe divifa in parti infinite fe foffe ancora divifibile in altre parti.

Ma noi l'abbiamo dimoftrata divifa in parti infinite dalle perpendicolari infinite, dunque KX è divifa in parti infinite tutte immediate l' una all' altra, e tutte uguali fra loro; dunque fe alle parti infinite della KX fi aggiunge comunemente la AK unità, tutte le parti di AX faranno in proporzione aritmetica: Ma le parti di AX fono parallele, ed uguali a tutte le infinite applicate intercette fra BY, ed FE, dunque le applicate infinite alla parabola fono in proporzione aritmetica, e lo fteffo avverrà fe fi prenda per parametro una porzione indivifibile, perche tutta l' A X verrà divifa in parti infinite, ed uguali dalle infinite perpendicolari.

Ed ecco dimoftrato quello, che il buon profeffore ha detto non poterfi dimoftrare, dopo averlo veduto dimoftrato in due modi, cioè nella VI. ed XI. propofizione dell'Autore, fenz'averlo intefo. Quì vedo, che l'Ariani oppone di nuovo, deducendo, come fuole, affurdi da quelle cofe, le quali convenendo con la ragione, non convengono col fuo fenfo, e dice; fe dagl' infiniti punti della A X fi divide l' affe A F in punti infiniti, tanti punti ci faranno nella A X, quanti nell' affe A F; ma a quefto fi rifponde, che per lo Metodo degl' indivifibili, il lato del triangolo rettangolo è minore dell'ipotenufa, e pure tutti e due s'intendono divifi in parti infinite.

AVVER-

AVVERTIMENTO

Dell' Autore del Nuovo Metodo intorno all' Antecedente Dimostrazione.

IN questa dimostrazione devesi considerare, che 'l Sig. Bonelli, il quale rispondeva al Sig. Ariani, supponendo ancor egli, come avevo io supposto, che 'l luogo delle radici fusse al perimetro della parabola Apolloniana, disse generalmente, che le applicate infinite intercette frà BY, ed FE sono in proporzione aritmetica; ciò che non è vero, perche avendo io poscia ritrovato, siccome hò detto nella Prefazione, che 'l perimetro della parabola Apolloniana si compone di linee rette, che sono pezzi d' ipotenuse; le applicate infinite, che terminano alla curva, non posson essere in proporzione aritmetica, appunto come si è dimostrato nell' antecedente Raccolta.

Tav. IV. F. XXVI.

Egli è ben vero però, che quantunque l'antecedente dimostrazione dell' accennato Sig. Bonelli non vaglia a provare, che le applicate infinite, intercette frà AK unità, ed AX; siano in proporzione aritmetica; vale però a provare, che tutte le applicate, che sono successivamente uguali alle porzioni intercette frà AK, ed AX siano in proporzione aritmetica; perche se le infinite intercette frà AK unità, ed AX sono in proporzione aritmetica; le applicate uguali a quelle, cioè IG, NM, CD, &c. sono in proporzione aritmetica frà esse: Ma le applicate infinite tirate da' punti della BF porzione dell' asse AF non sono in proporzione aritmetica, quando si suppone, che terminano alla curva AYDE; perche siccome abbiamo dimostrato nell' antecedente Raccolta, in proporzione aritmetica son quelle applicate sole, che terminano alla linea retta tirata da' punti estremi di BY unità, e di CD2, la quale è porzione d' ipotenusa. Così dunque la dimostrazione del Sig. Bonelli pruova, che si possono tirare alla curva tante applicate, quanti sono i punti della KX, le quali sono in proporzione aritmetica; ma non pruova, che le infinite applicate, che si suppongono tirate da' punti dell' asse, siano in proporzione aritmetica, quando si suppone, che le applicate terminano alla curva: Questo equivoco del Sig. Bonel-

li però dipende dall' aver supposto, come tutti gli altri, che la parabola Apolloniana abbia le proprietà, che se le assegnano. Legganſi ora le altre riſposte, che 'l Sig. Bonelli dà agli altri articoli della Lettera.

La maliziosa arte poi, con la quale Egli al paragrafo 5, che comincia; *E passando ad esaminare ec;* spera di porre negli occhi del Vulgo la polvere, acciò non vegga l' accusa, che 'l Signor Monforte a lui dà ne' paragrafi 3, 4, e 5, della sua Lettera, per aver voluto esprimere in numero i quadrati, e le radici intercette, fra quelle di radice razionale, cioè 1, 2, 3, e così poco cauta, e niente accorta, che se per avventura se li toglie dal volto la maschera, ella compare in tutto nuda, e nella sua propria bruttezza agl'occhi del Vulgo istesso.

L'Ariani interpretando quelle parole del Signor Monforte, cioè: *In questa però della quale V. S. si serve vengono considerate quelle applicate sole, che cadono in quei luoghi dell' asse, che sono designati da' numeri impari.* Spera in virtù di quelle parole, cioè: *Vengono considerate quelle applicate sole, che cadono a i punti dell' asse*, di far credere agl' ignoranti, ch' egli esclude ancora le applicate in linea intercette fra quelle de' numeri pari, cioè 1, 2, 3, le quali si possono esprimere in linea, ed in numero; e quivi facendo una vana pompa il misero Professore dice, *ma se mai tal credenza egli avesse.* Ma il Signor Monforte mostra assai chiaramente in tutta la sua Lettera, ch' egli non ha tal credenza, perche ben sa, che le applicate in linea, le quali sono mezze proporzionali fra il parametro, e l'ascissa, le dà Apollonio, lo che spiega chiaramente in quelle parole del paragrafo 4, cioè; *ed ancorche nelle parabole generalmente ogni linea, la quale è mezza proporzionale fra il parametro, e l' ascissa dell' asse sia applicata;* onde si vede chiaramente, che in tutto quello, che siegue a dire ne' paragrafi 5, 6, 7, e solamente per emendar l' Ariani, che voleva esprimere con numeri le applicate intercette fra quelle di numeri pari. Dunque il Signor Monforte non limita il Metodo dell'Autore alle sole applicate di numero pari, perche egli non esclu-

escludc quello, che concede Apollonio, cioè le applicate intercette in linea, le quali son quelle, che servono all'Autore per formare i cubi in linea delle applicate di radice razionale, li quali poi, servendo all'Autore di limiti de' cubi delle intercette, sono il cardine della sua invenzione per ritrovar le medie, come si vede nella proposizione V., nella quale Egli forma i cubi intercetti in linea, e non in numero, e nella XIII., nella quale prende le medie in linea, e non in numero.

E che sia vero, che 'l Signor Monforte non è capace di pensare una tale sciocchezza, si vede chiaramente nel paragrafo 7. *E similmente ingegnosa, e dotta la risposta ec.*, perchè in questo egli emenda l'Ariani per aver voluto provare, *che i cubi non potevano terminare nelle rette stabilite per loro limiti*. Questi cubi sono cubi delle applicate intercette, e queste applicate intercette sono linee non numeri; dunque il Sig. Monforte non toglie le applicate intercette in linea, e perciò non limita il Metodo dell'Autore, ma emenda l'Ariani, di cui solo special privilegio è d'opporsi ad Apollonio, e non del Signor Monforte.

Ma da tutto questo ben si scorge, che l'Ariani hà una interna conoscenza della sua propria ignoranza; e che nello stesso tempo, che fa sembiante di disprezzare il Sig. Monforte, nel profondo del suo cuore lo teme, perche or lo detesta, or lo vuole ingannato, ora ingannatore, ma sempre si affatica di far vedere al Vulgo, ch'egli sia del suo partito, ben sapendo di quanto peso siano appresso tutti le approvazioni di un tanto uomo.

Ma è ormai tempo di venire a quel punto fatale, che è stato l'origine, e la cagione di quella Scrittura men che onesta, che l'Ariani ha pubblicato. Questo vergognandosi d'aver preso errore negli elementi, si duole, non a ragione, del Sig. Monforte, perchè ce lo hà additato, dicendo nel §. 3. *Ciò ch' è chiaramente contro gli elementi della Geometria, come ogn' uno puol conoscere ec.* E senza considerare, che 'l Signor Monforte non lo riprende, che con modestia, e sol tanto quanto era necessario, per non mancare

care

care alla difesa dell'Autore, che aveva intrapresa; si lascia trasportare ad ogni eccesso d'imprudenza, e con ciò vorrebbe dare a terra, se possibil fosse il Sig. Monforte, oscurando il pregio delle sue dottissime Opere; ed occupando la mente de' Lettori in questa vana satira, fare, che non pongan mente agli errori manifesti, ne' quali egli è certamente inciampato contra gl'elementi della Geometria; e perciò nel paragrafo che siegue, il qual comincia; *Inferisce finalmente nell'istesso articolo ec.* fino al ultimo, se la passa vanamente tentando di offender l'alta stima, che li Signori Luca Tozzi, ed Antonio Monforte, mercè le loro fatiche s'anno appresso tutti li Letterati d'Europa acquistata. Egli taccia il Sig. Luca Tozzi di aver dato alla luce un Trattato di Trigonometria *geometrice exhibita absque usu Tabularum*, dicendo, che in quello trattato non si contenga più di quello, che si raccoglie dalli dati d'Euclide; e ch'oltr' a ciò questa invenzione sia stata prima largamence divisata dal gran Francesco Vieta nel capitolo 19. del libro 8: Tutte accuse tanto false, che in vece di minorare il pregio dell'Opera, palesano sempre più la sua temerità, come or ora farò vedere.

Doveria sapere l'Ariani per la catedra, che occupa, che tutti li nuovi ritrovati in Geometria devono esser fondati su le dimostrazioni degli antichi geometri; ma che sempre sono invenzioni, quando da quelle si deducono usi, a' quali altri non han pensato.

Ora, che questa nobilissima invenzione del Sig. Monforte sia stata, come egli dice largamente divisata da Francesco Vieta, è una manifesta impostura da lui immaginata per adombrare la mente degl'ignoranti, sperando forse, che siccom' egli non è capace d'intendere il libro di Vieta, non lo siano ancora gl'altri. Nel luogo citato di Vieta chiarissimamente si vede, che si serve del Canone Trigonometrico, anzi nel titolo istesso del capitolo propriamente *ad usum mathematici Canonis*: che poi per Canone intenda le tavole de' seni, non può difficultarsi; perche nelli dati susseguenti sempre parla de' seni, prosemi ec. seno tutto, seno

ci. ali.

d' angolo acuto ; per modo che bisognerebbe copiare il libro di Vieta se si volessero riportare tutte le proposizioni, nelle quali parla d' angoli, e de seni. Mi dica però questo invido Professore, per non chiamarlo calunniatore; come Francesco Vieta hà fatto questo trattato senza l' uso delle Tavole ?

Passa poi oltre il Professore ad accusare il Signor Monforte di aversi attribuito nelle sue invenzioni quelle d'altri nelli Micrometri : Ma questa è niente men che la prima una sfacciata calunnia, perche se avesse saputo intendere il Libro del Signor Monforte, averebbe veduto, che l' invenzione della parallasse nelle stelle fisse egli l' attribuisce a Roberto Hook, e perche questo aveva nel suo stromento le minute seconde solamente a tre a tre; stante che la parallasse della stella nella testa del Dragone, dice, ch' era fra 27, e 30 secondesime. Il Padre fra Domenico Basile fabbricò uno stromento da potersi discerner non solo le seconde ad una ad una, ma anche le terze; ed ogni persona curiosa può osservarlo nel Monastero della Sanità, ove detto Padre resiede: la stessa malignità usa in voler dare ad intendere, che 'l modo adoperato dal detto Sig. Monforte in misurar la Terra sia ritrovato d' altri; e ciò perchè non hà saputo conoscere quello, che v' è di nuovo, e di peregrino in quella invenzione.

Ma mi perdonino pure i sudetti Signori Monforte, e Tozzi, se hò io intrapreso la lor difesa contra un tal Accusatore, il quale avendo dato saggio di non intender gli elementi nelle obbiezioni da lui fatte all' Autore del nuovo Metodo, non è degno del titolo di oppositore di tali uomini: e ch' egli non intenda gl' elementi lo farò vedere ancor io assai chiaro, mal grado la malizia da lui praticata nella sua Scrittura per celare il manifesto errore, che ha commesso, e l' arte, che usa è la seguente.

Egli proccura maliziosamente di confonder l' errore, che hà preso contro agl' elementi con quello, ch' ha preso contra l' ipotesi, quando l' uno niente ha che fare coll' altro, benche l' uno dall' altro dipenda: E nel tempo stesso, che

che cerca sfugire maliziosamente di confessare si vergognoso errore, tacitamente lo conferma, perche egli non nomina più simili quei triangoli, ma li nomina rettilinei, quando nella sua Opposizione a carte 77. gli aveva nominati simili, cioè. *Quindi per la similitudine de triangoli, ec.* Ma noi toglieremo la maschera dal volto alla malizia, ne lasceremo, che confonda l'error dell'ipotesi, con quello, che ha preso contra gli elementi; e per ciò fare farem vedere, che quando anche potesse dire, come ha detto F L=♈2, ed FG=quadrato 2, ed FZ=♈8, ed MZ=♈8 —1, ciò ch'è l'errore contra l'ipotesi; non per questo ne siegue, che possa egli dire, i triangoli CMZ, CVE, esser simili, allora che dice MZ=♈ 8 — 1: mentre quando nomina MZ = ♈ 8 — 1, ripugna a dirittura alla X del X, perche MZ non è commensurabile con VE7, CV3, ed MC1; ripugna alla XVI. del VI; perchè moltiplicandosi fra loro gl'intermezzi, e gli estremi, non vengono uguali, siccome largamente hà divisato l'Autore a carte 78, e 79. Nè vale il dire, che questi triangoli nascano dall'ipotesi dell' Autore, perchè se si legge la sua opposizione, con la risposta dell'Autore a carte 77, 78, e 79, vedranno anche i ciechi esser lui, che li forma, e che nomina MZ ♈8 — 1, e tutto ciò a cagione di dimostrare per la via dell'assurdo, che FZ non sia cubo di FL, come vuole l'Autore, perche il prodotto de' mezzi viene, per suo calcolo sopra falsa ipotesi fatto, uguale a 72 — 3. Leggasi dunque a carte 77 la sua opposizione, e vedasi, se tutta questa construzione è fatta da lui per vedere, che il prodotto de' mezzi viene uguale a ♈72 — 3; o pure se viene per conseguenza dell'ipotesi dell'Autore, come il Professore pretende far credere agl'ignoranti. Adunque si vede manifestamente, che l'Autore trattandolo da debitore fallito, cioè, esigendo da lui solamente i debiti più chiari, non può mai sfuggire il debito, che ha contra Euclide, ancorche potesse egli dire FL=♈2, ed FG=2, ciò che non può mai dire per quello, che ha dimostrato l'Autore.

Quando poi nel seguente paragrafo il buon Professo-

re

re pretende, che 'l Monforte prenda equivoco, quando lo emenda intorno all'altro errore, che prende, volendo che i cubi possano terminare ad una linea obliqua, diversa da quella, che l'Autore assegna: s'inganna se spera, che la gente non s'avveda, che 'l Signor Monforte altro non fà, che considerare in genere l'opposizione, e notar in quella il falso metodo di ragionare da esso usato; e che non prenda briga di dimostrarlo, perche considera, che non ve n'era bisogno, mentre l'Autore lo avea gia dimostrato a carte 78, e 79, alla sua obbiezione rispondendo; e dimostrato in modo, che chi non vuol negar gl'elementi, siccome l'Ariani suole, bisogna che confessi, il luogo de' cubi assegnato dall'Autore, essere le linee CE, ed EI della figura a carte 72.

E' degno di osservazione ancora il modo, col quale siegue il suo malizioso artificio, criticando il paragrafo nono della Lettera del Monforte: *Ha piaciuto estremamente ec*; nel qual'egli spera far credere, che 'l Signor Monforte facendo conoscere il suo sentimento essere, che 'l luogo de' cubi sia nelle linee, che partono dall'asse della parabola cubica, e terminano all'ipotenusa, ripugni all'Autore. Egli è molto innocente se crede, che anche i meno accorti non veggano, essersi fatta questa dimostrazione per rispondere a coloro, i quali indebitamente dicevano, che i cubi terminano alla parabola cubica; e che nel rimanente questo non ripugna a quello, che l'Autore ha dimostrato nella sua Proposizione XII. cioè, che i cubi terminano all'asse, ed all'ascisse dell'asse d'una parabola, la quale, ancorche si descriva per la via piana, fà però l'ufficio di cubica; e che ancora terminano all'ipotenusa del triangolo isoscele rettangolo; e poscia le stesse lunghezze si ritrovano ne' luoghi da lui assegnati, cioè nelle due linee BF, ed FL, nel qual luogo solo son corrispondenti alle applicate: e che sia così, il Signor Monforte se ne dichiara espressamente ove dice. *Benche nel suo dottissimo trattato ciò l'abbia spiegato in altro modo, ec.*

Resta dunque manifestamente dimostrato, che in quel-

lo scritto l' Ariani siasi dato a conoscere ugualmente male inteso di Geometria, che poco morigerato ne' costumi. Male inteso in Geometria, perche ha fatto conoscere di non intendere Apollonio, Galileo, ed il metodo degl' indivisibili: la qual cosa però non è maraviglia, quando prima ha mostrato di non intendere gl' elementi, siccome si è dimostrato in tutta questa Scrittura. Mal morigerato, perche ave accusato il Signor Monforte d' aver ingannato il Signor Luca Tozzi, e d' aver lusingato l' Autore del Nuovo Metodo, allora che la sentiva diversamente; quandoche in questo scritto si dimostra, che 'l Monforte nella sua Lettera altro non dice, che tutto quello, che l' Autore medesimo dice; donde ne nasce, che se avesse errato l' Autore, averebbe errato ancor egli. Lo accusa di più di essersi servito nelle sue degnissime Opere dell' altrui invenzioni; ma è stato convinto in questo scritto di non aver egli mai saputo leggere, ne intendere il da lui male a proposito citato Vieta.

Ma dov' egli mostra più, che in altra parte lo spirito di superbia, dal quale vanamente è posseduto il misero Professore, ed il quale è la più potente cagione della sua ignoranza, è nel paragrafo 4, dove convertendo in peccato un atto di somma virtù del Sig. Monforte dice. *Perche se fosse stato forte su la verità di ciò, che si contendeva, non si sarebbe con tanta debolezza ritrattato.*

Egli dunque crede, che sia debolezza, e viltà lo arrendersi alle ragioni; e crede altresì, che sia punto d' onore mantener ferme le opposizioni, ancorche false, quando una volta si son fatte. Questo è quello, che ha praticato lui; ma non è già quello, che hà praticato Buonaventura Cavalerio, il quale fè un libro intero solamente per ritrattarsi d' un errore, che l' era stato avvertito. Non quello, che ha praticato Keplero. Non quello, che averebbe praticato l' Autore stesso se l' avessero portate convincenti ragioni in contrario; ma è quello, che praticano solamente gli uomini poco morigerati, da' quali non và mai disgiunta l' ignoranza: dalla qual cosa poi ne avviene, che per

difen-

difendere uno errore, ne dicano infiniti altri, come è accaduto all'Ariani in quel suo scritto. Per le quali cose si conchiude, che se contra di lui si volesse usare il rigore dalle leggi prescritto; quell'istessa scrittura, ch'egli dice aver fatta per decoro, e difesa della Cattedra, che occupa, sarebbe quella, che per la disposizione delle leggi lo doverebbe condannare a perderla.

Ma con tutto che la giusta indignazione, che mi hà destata la temerità praticata da questo infelice Professore, m'abbia indotto a far noto al mondo il suo poco onesto talento, e la sua insufficienza nella Geometria che professa; non è perciò che la mia compassione non voglia dargli campo di penitenza, e di ricuperare il suo onore.

Solevano i Romani, quando nelle battaglie aveva una qualche Legione commessa viltà manifesta, darli campo di ricuperare il suo onore, operando qualche atto eroico, e di gran valore. Viltà maggiore nella milizia delle scienze di quella, che ha commessa questo pubblico Professore, facendosi conoscere ignorante d'Apollonio, del metodo degl'indivisibili, e degl'elementi stessi, certamente non si puole immaginare; vogliamo dunque darli campo di ricuperare il suo onore. Egli nomina nelle sue opposizioni il gran Vieta, e lo cita al capitolo 19. del libro 8. dunque lo intende, e come pubblico Professore è obbligato a spiegare i passi degli Autori, che non s'intendono da'scolari. Mi spieghi egli dunque il metodo del medesimo Vieta, con il quale si ritrova il valore della seguente equazione cioè; 926082. - N - 1 c. uguale a 342451844.
Ma avverta, che la voglio per lo metodo di Vieta da lui citato, perchè a me ancora è noto, che per altra via si possa fare, ma lo richiedo di questo, perche mio intento è solamente d'intender Vieta, che non intendo, e che lui si è dichiarato d'intendere.

Ne pensi adombrar la mente del Vulgo dicendo (sicome suole) che i Professori non sono obbligati a solvere gl'altrui problemi; perche questo, che s'addimanda non è problema, ma spiegazione d'Autore, alla qual cosa son te-

nuti li pubblici professori, ed in particolare Lui, ch' espressamente s' è dichiarato d' intendere il gran Vieta.

Ciò fatto, com' egli è in obbligo di fare, potranno i suoi discepoli darsi ad intendere, che tutti gli sudetti errori, che ha presi sieno stati per dimenticanza, o per soverchia prevenzione di mente, che aveva contra l' Opera dell' Autore del NUOVO METODO, o per altra passione, e non per mancanza di conoscenza; ed in questa guisa ricupererà egli in parte il suo perduto onore nella letteraria milizia.

DI-

DIMOSTRAZIONE
DEL LUOGO

Ove terminano le linee cubiche ricercate nel Libro intitolato

NUOVO METODO
GEOMETRICO

Per trovare fra due linee rette date infinite medie continue proporzionali.

IN NAPOLI MDCCXV.
Nella Stamperia di Felice Mosca
CON LICENZA DE' SUPERIORI

LA controversia nata in Napoli intorno al libro intitolato: Nuovo Metodo Geometrico per trovare fra due linee rette date infinite medie continue proporzionali, *di cui io porto ferma opinione, non essere mai stata al mondo la simigliante, facilmente si può ridurre a questi termini, cioè di ritrovare il luogo dove vanno a terminare le applicate all'asse della parabola allungate di modo, che sian quarte Proporzionali di tre linee date. Di tutto l'altro, che nel Libro si contiene, come quello, che niente affatto si appartiene al Metodo, non si dee a mio credere ragionare; poiche dal farlo, alcun buon frutto non si trarrebbe, anzi si farebbe un grave oltraggio alla Geometria, rendendola simile presso de' meno scienziati a quelle discipline, che tutto dì piatiscono delle loro conclusioni senza fine. Alcuni valentuomini con salde dimostrazioni, che d' assalto nemico non temono, han già fatto vedere, che le dette quarte proporzionali non possino terminare in alcune linee diritte, come il dottissimo Autor del Libro immagina, ma deono finire in una curva. Io con questo scritto mi studio di fare il medesimo, e per la strada sintetica dimostro il vero luogo delle dette linee. Se la mia sia dimostrazione, ovvero paralogismo, lo lascio considerare al Lettore; il quale sol mi cale che sappia, che non per mio volere, ma per comando di tale, a cui debbo ubbidire, ho fatto questa breve scrittura.*

LEM-

LEMMA

Se faranno quattro linee continue proporzionali il cubo fatto sopra la terza farà uguale al parallelepipedo fatto sul quadrato della quarta coll'altezza della prima.

DIMOSTRAZIONE.

Tav. IV. F.XXVII.

SIano quattro linee continue proporzionali A, B, C, D, dico, ch'il cubo fatto sopra C farà uguale al parallelepipedo fatto sul quadrato di D coll'altezza A. Il quadrato di D al quadrato di C ha la medesima proporzione di D a B*; ma la proporzione di D a B è la medesima di quella di C ad A, dunque il quadrato di D al quadrato di C, ha la medesima proporzione, che C ad A; ma l'altezza del cubo fatto su C, è C, e l'altezza del solido fatto sul quadrato di D, è A; dunque farà come la base del solido, ch'è il quadrato di D alla base del cubo, ch'è il quadrato di C, così l'altezza del cubo all'altezza del solido. Dunque il cubo, ed il solido reciprocano le basi, e l'altezza; dunque faranno fra di loro uguali*.

* per la 20. del sesto.

* per la 34. dell'undecimo degli Elementi.

Per calcolo in lettere ÷÷ a^1 a^2 a^3 a^4 il cubo di a^3 è a^9, il prodotto del quadrato di a^4 per a è a^9.

In numeri 2, 4, 8, 16. il cubo di 8 è 512. il quadrato di 16 è 256, multiplicato per 2. fa 512.

PROPOSIZIONE.

Tav. IV. Figura XXVIII.

SE in una parabola piana si allungheranno le ordinate all'Asse di modo, che siano quarte proporzionali del *Parametro Ordinate all'Asse*, ed *Asciffe*, termineranno tutte in una parabola cubica.

Sia data la parabola piana AMN, io dico, che se si allungheranno la CL in H, la DM in I, e la EN in P di modo, che CH sia quarta proporzionale delle tre *Parametro*

tro $=a$, CL, CA, e la DI quarta proporzionale di a, DM, DA, e così tutte le altre applicate; li punti H, I, F, &c. saranno nel perimetro d' una parabola cubica, in cui il cubo dell' ordinata sarà uguale al prodotto del quadrato dell' *Ascissa* per lo parametro $X^3 = Y^2$ fatto il parametro $=1$.

Per lo punto A vertice della parabola si tiri la linea AQ perpendicolare all' asse AE, ed uguale ad EF, e si congiungano FQ; e per li punti I, H, G, si alzino le perpendicolari IP, HO, GK. Le linee a, CL, CA, CH, sono quattro continue proporzionali (per la proprietà della parabola, e costruzione). Ma CA è uguale ad HO, e CH è uguale ad AO; dunque le quattro a, CL, HO, AO sono quattro continue proporzionali; dunque per lo Lemma sarà il cubo di HO uguale al prodotto del quadrato di AO per a; dunque la linea HO sarà un applicata della parabola cubica sudetta, ed il punto H sarà in detta parabola. Lo stesso si dice de' punti I, ed F, e di tutti gli altri. Facendosi $HO=X$, $AO=Y$, sarà $X^3 = Y^2$ supposto $a=1$. Dunque tutte le sudette quarte proporzionali vanno a terminare nel perimetro della sudetta parabola cubica, la quale ha per vertice il punto A, per parametro la stessa unità parametro della parabola piana, e per asse la linea $AQ=EF$.

COROLLARIO I.

Dunque le dette quarte proporzionali non possono terminare in una linea retta.

COROLLARIO II.

Dunque è falsa la quinta proposizione del Libro intitolato *Nuovo Metodo Geometrico* per trovare fra due linee rette date infinite medie continue proporzionali stampato in Anversa per Cristofaro Plantini.

COROLLARIO III.

DUnque il detto Metodo fondato assolutamente su di detta quinta proposizione è falso.

SCOLIO.

MA se alcun dicesse, che quantunque sia vero, che le dette quattro proporzionali vadano a terminare in detta parabola cubica, possono ancora terminare in una linea retta, siccome hà dimostrato il Signor Monforte in una sua lettera stampata a carte 91. del sudetto libro. A costui sarebbe la più corta, ed acconcia risposta il tacersi; o pure se gli potrebbe dire, che è chiaro per lume naturale, che il curvo non è l'istesso, che 'l retto, e che la nostra mente è capace di distinguere il vero dal falso, e che un vero non può contradiare un' altro vero. Ma perche bisogna in iscrivendo addattarsi allo'ntendimento de' deboli, rispondo, che non solo le linee cubiche, siccome ha dimostrato il Sig. Monforte, ma ogni sorte di linee rette in qualunque proporzione siano fra di loro, purche non siano uguali, facendosi partire perpendicolari ad un lato di un triangolo rettangolo, possono terminare nell' ipotenusa del medesimo nel seguente modo. Si esponga una linea diritta, nella quale cominciando sempre da un punto estremo si segnino le lunghezze uguali alle linee date; poi dal punto dove terminano queste lunghezze si tiri la perpendicolare uguale alla detta linea segnata, e si compisca il triangolo. E' manifesto, che se da' punti, che segnano dette lunghezze si tirano le parallele alla perpendicolare fino all' ipotenusa, queste parallele saranno uguali alle linee date. Con questo artificio il dottissimo, e gentilissimo Cavaliere Signor D. Paolo Doria ha fatto, che le linee, le quali sono fra di loro, come i numeri quadrati 1, 4, 9, 16, &c. ch' egli chiama linee quadrate, e dal Galileo si dimostrano terminare nella parabola piana, vadano a terminare nella linea retta.

Tav. V. Fi. XXIX

Sia

Sia data la linea AB divisa in parti uguali AC, CD, DB, &c. se da' punti C, D, B si tireranno le perpendicolari CM = AC = 1, DN = 4, BO = 9, &c. li punti M, N, O saranno nel perimetro della parabola piana; ciò dimostra il Galileo: ma il Signor D.Paolo fà terminare le sudette linee nell' ipotenusa del triangolo rettangolo*; qual dunque si è la differenza tra le linee del Galileo, e quelle del Signor D. Paolo? Ella si è la diversità del *sito* delle linee; quelle del Galileo sono in distanze uguali frà di loro, quelle del Signor D. Paolo in distanze disuguali. E qui mi cade in acconcio di avvertire, che tutte le linee diritte, che si possono trarre, o immaginare per tutta l' eternità, in riguardo d' un'altra linea diritta data si possono chiamare quadrate, cubiche, biquadrate, &c. all' infinito; perche sempre fra la linea data, la quale si puol prendere per unità, e qualunque altra, si possono supponere una, due, tre, quattro, &c. mezze proporzionali. Io mi vergogno di far più parole in una cosa così chiara; onde per dar fine ad un' oramai nojoso discorso, dico, che sempre che si vogliono allungare le applicate della parabola nel *sito*, in cui si trovano allogate nella parabola di modo, che siano quarte proporzionali delle tre dette, di necessità devono terminare nel perimetro della detta parabola cubica, e non possono terminare nella linea retta.

Tav. V. Fi. XXX.

Il Sig. D. Paolo però soggiugnerà forse, che lui ha dimostrato nella risposta alla prima obbiezzione de' Sign. Ariano, e Galizia pag. 73, e 74, che le dette linee nel sito richiesto non possono terminare nè più quà, nè più là della linea retta da lui posta per limite de' suoi cubi, onde di necessità devono terminare in detta linea. Io replico, che il dottissimo Cavaliere ha creduto di dimostrar ciò, ma veracemente non l'ha dimostrato. Uno de' nei della sua dimostrazione si è, che li triangoli L 12. T; 3 D E per la medesima ragione, per la quale egli li crede simili non lo sono. Egli dice, che sono simili, perche hanno due lati proporzionali a due lati, e'l terzo uguale al terzo; ed appunto per questo non sono simili, nè possono essere simili. Perche se

due triangoli averanno due lati proporzionali a due lati, ed il terzo uguale al terzo, non saranno simili. Siccome ancora li due triangoli I L F, I 3 F, perche hanno due lati proporzionali a due lati, ed il lato F I commune non sono simili.

Dopo stampata fin quì la presente scrittura, mi è capitata nelle mani una copia del Libro, in cui si è cambiata la carta 73., e si reca nella novella carta alla faccia 74. una nuova dimostrazione, la quale quantunque bellissima, ha una leggiera macola. Il dottissimo Autore dice al §. 1, e 2 *dunque sarà come L 12, e 3 D a DE, ovvero 12 D, così LF, e 3 F ad FK* poscia conchiude, *dunque L 12, e 3 D averanno l' istessa proporzione a DE; e perciò saranno uguali fra di loro;* *e similmente LF, e 3 F averanno l' istessa proporzione ad FI, e perciò saranno uguali frà loro, il tutto alla parte, il che ripugna.* Queste ultime conseguenze non si traggono dagli antecedenti, e perciò sono false con tutto l'altro, che siegue.

RI-

RISPOSTA

All' antecedente Scrittura.

L'Antecedente Scrittura si pubblicò in Napoli l'anno 1715., e l'Autore d'essa è il Sig. D. Nicolò Galizia prima professore di matematica, ed ora pubblico lettore de'canoni ne'Regj Studj di Napoli. Subito che fu pubblicata io la feci ristampare insieme con la mia risposta: Ma perche in quel tempo ad altro non badai, se non che a difender le mie proposizioni; mi contentai solamente nella mia risposta di far conoscere, ch' egli non seguiva la mia Ipotesi, ne mi diedi briga di notare li moltissimi, e manifestissimi errori, ne' quali egli era caduto nella sua brevissima Scrittura. Ora che hò avuto agio, e tempo di considerarli, li noterò tutti partitamente in questa mia risposta; e credo, che ad ogn' uomo mezzanamente inteso di Geometria ciò dovrà recar meraviglia. Narriamo dunque le sue opposizioni.

Questo Oppositore altra cosa non fà, se non che spiegare per la via sintetica la generale proprietà della parabora cubica del secondo genere, la qual è la stessa, che 'l dottissimo Sig. D. Bartolomeo Intieri hà spiegato per la via analitica nella lettera, che si legge alla pag. 96. di questo libro, e che comincia colle parole: *Io hò fatto, e farò sempre, ec.* A questa obbiezione io non sarei obbligato rispondere, perche siccome egli non siegue la mia Ipotesi, appunto come non l'hà seguitata l'Oppositore sudetto; la risposta, che hò dato a quella alla pag. 95., e 96; vale ancora per l'opposizione del Sig. D. Nicolò Galizia fatta per la via sintetica. E ch' egli non siegua la mia Ipotesi, è certissimo; perche suppone l'asse AE indeterminato; Poi suppone descritta la parabola Apolloniana AGLN come una curva a cagione, che descrive quante applicate vuole parallele all' asse AE, come per esempio PI, OH &c. Indi col parametro AB, ovvero BG suppone descrivere la curva AGHIF, al perimetro del-

Tav. IV. F. XXVIII

della quale conchiude, che terminano i cubi CH, e DI, e tutti gl'altri. L'antecedente è la descrizione che fà della parabola cubica il nostro Oppositore, considerandola come curva.

Io all'incontro nella mia Ipotesi divido l'asse AE in nove parti uguali ad AB parametro, o sia unità; dipoi sopra l'asse AE prendo la porzione AD uguale a 4 unità AB; indi tiro la BG uguale ad AB, la DM uguale a 2 unità AB, e la EN uguale a 3 unità AB. In appresso tiro per costruzione la DI uguale ad 8 unità AB, e per ciò cubo per costruzione di DM2, e la EF uguale a 27 unità AB, e per ciò cubo per costruzione di EN3; e per i punti A, G, I, F, tiro tre linee rette AG, GI, IF, ed in virtù di questa nuova costruzione dimostro, che i cubi terminano alle linee rette da me tirate; dalla qual cosa n'avviene, che la sua curva non possa esser il luogo de' cubi: ma di tutta questa mia nuova, e in tutto geometrica costruzione il mio Oppositore non fà alcun conto, e bada solamente ad insegnare a descriver la parabola cubica de' signori moderni, la quale io hò chiaramente dimostrato non avere le proprietà, ch'essi le assegnano: ond'è, che la degnissima spiega della parabola cubica del secondo genere, che fà il mio Oppositore, considerandola come una curva, niente nuoce a me, perche niente hà che fare con quello, che io hò fatto.

Ma quel che dee recar meraviglia è il vedere quanto questo mio Oppositore si era fortemente intestato di questa sua spiega della parabola cubica, perche ne' tre corollarij, che sieguono alla sua pretesa dimostrazione, grida con sì fatta enfasi, replicando tre volte, *DUNQUE, DUNQUE, DUNQUE*, di modo che sembra, ch'egli vedesse di quella chiaramente, e distintamente le proprietà, che gli geometri l'assegnano. E pur è vero, che io temo, ch'egli non avesse letto in quel tempo nè la mia ipotesi, nè le mie dimostrazioni: e quel che è più, io credo, ch'egli non avesse nè meno inteso la spiega, ch'egli medesimo faceva della parabola cubica, ma che ragionasse in tut-

tutto sù la fede d'altri, ficcome per tutto Napoli si mormurava.

Ed invero leggendosi lo scolio, che siegue alla sua dimostrazione sébra, che non abbia egli formata l'antecedente opposizione, perche in quella spiega assai bene la parabola cubica per modo tale, che non cade in altro errore, se non in quello, ch'è comune a tutt' i matematici moderni, cioè di credere, che queste parabole cubiche da moderni pensate abbino le proprietà, ch' essi le assegnano: Ma nello scolio poi mostra, che quando egli fece l'antecedente opposizione, si era dimenticato affatto la proprietà della parabola Apolloniana, donde dipende la cubica, la qual cosa è giusto lo stesso, che dire, che in Aritmetica un uomo possa multiplicare quando non sà sommare; onde è, che non si potrebbe dichiarar reo di grave colpa colui, il quale dicesse, ch'il Sig. D. Nicolò non poteva certamente ragionar della parabola cubica, quando s'era dimenticato la proprietà generale della piana. Dimostriamo dunque, ch' egli in quel tempo non si ricordava la proprietà della parabola piana, e perciò fare esaminiamo il suo scolio.

Egli nel principio del suo scolio, che comincia: *Ma se alcun dicesse ec.*, fà a se stesso una difficultà, e dice: che 'l Signor Monforte, ed io dicemmo, che gli stessi cubi, che terminano alla curva, possono terminare ancora alla retta; e poi a questo risponde magistralmente dicendo, *è chiaro per lume naturale, che il curvo non è lo stesso che il retto, e che la nostra mente è capace di distinguere il vero dal falso; e che un vero non può contradiare ad un altro vero*, ed in ciò dice bene, perche io rispondo, che appunto appunto i cubi non possono terminare alla curva, quando hò dimostrato per la via d' Euclide, che terminano alla retta.

Ma dov' egli trapassa i limiti dell'enfasi, e si dimostra un poco troppo sdegnato, è in quel che siegue alle antecedenti enfatiche espressioni; perche quivi ci tratta da menti deboli dicendo, che intanto scrive, perche trascrivendo bisogna adattarsi all' intendimento de' deboli: e quel ch' è bello si è, che nello stesso tempo si contradice,

dice, perchè asserisce, che non solo le linee cubiche, ma tutte qualunque linee, purchè non siano uguali, si possono far terminare all'ipotenusa d'un triangolo rettangolo; ed in conseguenza di ciò confessa, che 'l Sig. Monforte hà dimostrato, che i cubi terminano all'ipotenusa. In questa proposizione si contradice certamente, perche in prima hà detto, che 'l curvo non è lo stesso, che 'l retto, e che perciò i cubi non possono terminare alla retta, ed alla curva; in appresso dice, che qualunque linee, purche non siano uguali, si possono far terminare dove si vuole, e confessa, che 'l Sig. Monforte hà fatto terminare i cubi alla retta, dunque si contradice: leggasi nello scolio da dove comincia: *Ma perche bisogna in scrivendo adattarsi all' intendimento de' deboli*, fino alle parole, *nel seguente modo ec.*

Di poi il mio Avversario insegna a descrivere queste linee, che si possono far terminare all'ipotenusa del triangolo rettangolo, ne però discende al particolare delle linee cubiche, ma mostra solamente, che dal lato d'un triangolo rettangolo si possono tirare infinite linee rette, le quali terminino all' ipotenusa, e siano parallele all' altro lato: Dimostrazione invero troppo facile, ma che però non è al mio caso, perche io parlo de' cubi, i quali hò dimostrato, che non possono terminare alla curva: leggasi nel suo scolio da dove comincia, *si esponga una linea diritta*, sin dove termina colle seguenti parole cioè: *Queste parallele saranno uguali alle linee date ec.* Indi applica la sua antecedente dimostrazione al mio caso; e quì è, dove fà conoscere, che in quel tempo non intendeva, o si era dimenticato la proprietà generale della parabola Apolloniana; perchè dice, che Galileo fà terminare al perimetro della parabola piana i quadrati delle radici, la qual cosa, non hò sentito dire da altri, quantunque mi sia avvenuto di sentire molte strane opinioni di alcuni geometri. E quì mi piace di trascrivere tutte le sue parole. *Con questo artificio il dottissimo, e gentilissimo Cavaliere Sig. D. Paolo Doria hà fatto, che le linee, le quali sono frà di loro, come i numeri quadrati 1, 4, 9, 16, &c. ch' egli chiama linee quadrate, e dal Galileo si dimostrano termina-*

minare nella parabola piana, vadano a terminare alla linea retta. Ecco ch'egli dichiara, che li quadrati delle radici terminano alla parabola piana.

E non è già, ch' egli abbia ciò scritto a caso, e con poca riflessione; perche in appresso si affatica di dimostrare, che i quadrati delle radici terminano espressamente al perimetro della parabola Apolloniana: ed ecco trascritta la dimostrazione, che pretende farne.

Sia data la linea AB divisa in parti uguali AC, CD, DB &c. se da punti C, D, B si tireranno le perpendiculari CM= AC = 1, DN=4, BO=9 &c. li punti M, N, O saranno nel perimetro della parabola piana; ciò dimostra il Galileo: Ma il Signor D. Paolo fà terminare le sudette linee nell' ipotenusa del triangolo rettangolo. Ecco dunque, ch' egli chiaramente dice, che Galileo fà terminare al perimetro della parabola piana i quadrati delle radici; e ch' ave inteso di dimostrare, che veramente terminano al perimetro della parabola piana, le linee, CM, DN, e BO, le quali esprimono 1, 4, e 9, che sono i quadrati delle radici 1, 2, 3.

Fi. XXX. Tav. V.

Siegue poi a far conoscere, che in quel tempo, o non intendeva, o s'era dimenticato il modo, col quale Galileo ci hà insegnato a descrivere la parabola Apolloniana: ed eccone la pruova chiara nelle seguenti sue parole: *Qual dunque si è la differenza tra le linee del Galileo, e quelle del Sig. D. Paolo? Ella si è la diversità del sito delle linee; quelle del Galileo sono in distanze uguali frà di loro, quelle del Signor D. Paolo in distanze disuguali*.

E qui è dove di nuovo erra il mio Oppositore intorno alla generale proprietà della parabola piana, della quale si era dimenticato: Perche, se egli intende ragionare delle applicate di numero intero, come sono 1, 2, 3, &c. queste ne Galileo, ne il Sig. D. Paolo le situano in distanze uguali, perche le situano a i termini delle ascisse dell' asse 1, 4, e 9: Se poi intende ragionare delle infinite intercette fra 1, e 2, e delle infinite intercette frà 2, e 3; queste il Signor D. Paolo le situa in parti uguali, perche divide l' asse in parti infinite, e tutte uguali frà esse; la qual cosa

non hà fatto Galileo. Ecco dunque dimostrato chiaramente, che 'l Signor D. Nicolò Galizia in quel tempo, che a me opponendosi spiegava le proprietà delle parabole cubiche, si era affatto dimenticato della proprietà generale della parabola Apolloniana, che vale a dire, della parabòla piana.

Ma ne meno terminano quì gl' abbagli del mio Oppositore, perche dopo le tante stravaganti proposizioni, quante son quelle, che abbiam detto contenersi in quel suo breve scolio, egli asserisce; *che tutte le linee dritte, che si possono immaginare, o trarre per tutta l'eternità in riguardo di un'altra linea retta data, si possono chiamar cubi, quadrati biquadrati, e come si vuole*, e ciò dicendo non conosce l' artificio da me usato, il quale consiste nell' arte di trovare i cubi dentro i limiti de' cubi 1, ed 8., e de' cubi 8, e 27, e non dentro i limiti dell' unità, e di qualsivoglia linea data, com' esso dice: leggasi nel suo scolio donde comincia; e *quì mi cade in acconcio*, sin dove finisce 2, 3, 4, *&c. mezze proporzionali*. Ma il più grazioso si è, che dopò tutti li suoi antecedenti manifestissimi abbagli, egli ragiona con tal forza d' espressione, come se veramente vedesse chiaramente, e distintamente le cose, che hà asserite, perche prorumpendo nell' impatienza dice: *Io mi vergogno di far più parole in una cosa così chiara, onde per dar fine oramai ad un nojoso discorso dico, &c.*

A' queste parole (e mi perdoni pure il Sig. D. Nicolò Galizia) un poco troppo disprezzanti delle mie Invenzioni, si potrebbe rispondere, che per molta, ch' egli si lusinghi, che sia in Napoli la sua autorità in ciò che riguarda le scienze, dovea un poco più temere il biasimo de letterati d' Europa, e quello de' posteri, e considerar la meraviglia, che recherà a tutti, il sentir ragionare con tuono cotanto autorevole un uomo, che poc' anzi hà scritto, ed hà impreso di dimostrare, *che i quadrati delle radici terminano al perimetro della parabola Apolloniana*: e quì potrei ancor'io nelle imprecazioni prorompere; ma perche non sono accostumato ad usar sì fatti termini, me la passerò con una considerazione morale, e dirò, che le maniere cotanto espres-

espressive del mio Oppositore fan conoscere, che Renato des-Cartes con quel suo precetto, col quale ci prescrive di conoscer per vero quello, di che facciamo idea chiara, e distinta, senza additarci il modo di ben determinare, quando nostra mente faccia delle cose idea chiara, e distinta, ha rovinato le scienze: imperciocche la maggior parte degl'uomini confondono i loro sofismi coll'idee chiare, e distinte; e per lo più spesso, senza penetrar nel intimo delle cose, ammettono le ragioni apparenti per dimostrative, ed in conseguenza di ciò confondono il vero col falso. Diciamo ora quello, ch'egli narra ne' due seguenti suoi paragrafi.

Ne' due paragrafi, che sieguono, i quali cominciano, l' uno; *Il Signor D. Paolo però ec.*; e l' altro; *dopò stampata ec.* Nel primo egli accenna la mia dimostrazione, ma non la spiega, ne l'impugna, perchè, come si è veduto, non poteva ne spiegarla, ne impugnarla, mentre s' era dimenticato della generale proprietà della parabola Apolloniana, e del modo, con il quale Galileo ce l' insegna a descrivere, ch' è il cardine di tutta la mia Invenzione: E nel secondo poi si duole, che io abbia mutato il testo di una risposta, e mi riprende di aver errato nella risposta, che feci a carte 73, e 74. del mio nuovo Metodo stampato in Amsterdam l' anno 1715. per Cristofaro Platini, prendendo per triangoli simili quelli, che non sono simili. A questo però io brievemente rispondo, come risposi all'ora; che è sempre stato permesso a gli Autori di supplire le loro dimostrazioni, perchè in Geometria potendovi essere delle proposizioni vere, e mal dimostrate, non è gran fatto, che dagli Autori si supplischino; la qual cosa però non può farsi, quando le proposizioni sono di lor natura false, siccome appunto son quelle dell' Oppositore, perche all' ora non si possono in verun conto supplire.

E di poi li rispondo, che io non nutrisco nell' animo la temeraria opinione d' essere infallibile; perche, riputando poco sinceri tutti quelli matematici, che mostrano renitenza a ritrattarsi de' loro errori, temerei di cadere ne'medesi-

desimi errori, che riprendo negl' altri, se mi ostinassi a difendere i miei abbagli; ond'è, che io non son renitente a confessar di buon cuore d' aver preso abbagli in quella risposta: dirò bensì, che non è gran fatto ad uno Inventore, il quale, oltre l' avere da dimostrare le sue proposizioni, si ritrova impegnato a rispondere alle opposizioni di tutti, il pigliare abbagli; ma all' incontro dirò, che è molto il cadere spesse volte in abbagli ad un' Oppositore, il qual non hà da pensare ad altro, che ad esaminare una proposizione altrui a solo fine d' impugnarla.

E per ultimo dico, che a me basta, che la mia Invenzione sia vera, come certamente è, perchè poi non importa, ch' io l'abbia supplita, e supplita più volte; perche il pregio del Opera consiste nel invenzione: lo male s' è, quando la mente pensa le cose false, perche come tali, sono indimostrabili; e che sia così il mio Oppositore esperimenti, se puo supplir gli tanti abbagli, che hà presi nelle sue opposizioni, ed in quello brevissimo scolio, per potere impugnar poi con vere dimostrazioni la mia Invenzione, e vedrà, che non puole in alcun conto supplirli; perchè ciò ch' è vero, non si può far, che sia falso: E come che hò detto, che tutte le proposizioni, che son vere, ma che non sono state perfettamente dimostrate, si possono agevolmente supplire: Voglio quì appresso narrare quella dimostrazione, nella quale il Sig. D. Nicolò Galizia mi accusa d' aver preso abbaglio, per supplirla, siccome ho promesso.

E'da sapersi, che all'obbiezione prima pag. 85. di questo libro, il Sig. Agostino Ariani, ed il Sig. D. Nicolò Galizia unitamente aveano scritto, come si può vedere da quella obbiezione, che tutti i cubi potevano terminare ad altre rette, fuori delle rette CE, ed EQ, senza che niun cubo degl' intercetti frà 8, e 27 dovesse necessariamente esser uguale, o maggiore di 27; leggasi la di loro obbiezione a carte 85. di questo libro, alla quale io risposi generalmente, come si vede dalla mia risposta pag. 86, e 87, ch' essi non stavano fermi sù la mia Ipotesi, perche ragionavano di una proprietà, che appartiene solamente alle

Tav. IV. Fig. XXI.

linee

linee rette semplici, nel mentre che io ragionava di quarte proporzionali, o sia di cubi: m' impegnai dunque a dimostrar per gl' elementi di Euclide, che tutti i cubi non possono terminare ad altre rette dentro, o fuori delle mie linee rette, e la seguente fù la mia dimostrazione, la quale si legge alla pag. 74, e 75 del Metodo stampato in Amsterdam l'anno 1715. per Cristofaro Platini; e la quale mi è piaciuto di trascriver quì appresso.

RISPOSTA:

Dell' obbiezione, che si legge a carte 85.

Questi miei stimatissimi Oppositori applicano al mio caso una proposizione, che niente hà che fare con quello, di che io ragiono, perchè io parlo de' cubi, o sia di terze proporzionali, ed essi parlano di linee rette semplici; onde son essi tenuti a dimostrare, che ne' cubi avviene lo stesso, che nelle linee rette. Io però dimostrerò il contrario, per far loro conoscere l'equivoco, che han preso, a me opponendosi; e dirò, che se le parallele intercette frà DE, ed FI terminano a qualunque altra linea fuori della EI, non possono esser cubi delle applicate alla parabola ACG; ed eccone la pruova.

Tav. V. F. XXXI.

Non negano i miei Sig. Oppositori, che DE 8 sia cubo di DO 2 per costruzione, ed FI 27 cubo di FG 3. Non negano parimente, che nella mia seconda proposizione abbia dimostrato, che tutte le parallele, le quali terminano all'ipotenusa AH del triangolo AFH siano quadrati delle applicate: Prendasi adunque fra DP quadrato di DO 2, ed FH quadrato di FG per costruzione, una mezza proporzionale in proporzione geometrica, e sia per esempio MY; e sarà come DP ad MY, così MY ad FH: E perche le radici sono fra di loro in subduplicata ragione de' quadrati, sarà come DO ad MZ, così MZ ad FG: Adunque per Euclide sarà ancora come il cubo di DO, ch' è DE, al cubo di MZ, così il cubo di MZ ad FI cubo di FG. Prolunghino dunque i miei signori

gnori Oppositori la MY sino al punto 18 della perpendicolare I, 10; e non potranno certamente negare, che nella lunghezza di M,18 vi sia la lunghezza del cubo di MZ, luogo da me ricercato.

Determinino adunque essi in qual punto della Y,18 vogliano, che termini il cubo di MZ, e sia per esempio, nel punto N fuori della EI; congiunghino la MN, e la prolunghino sino al punto L, dove si unisce coll'asse FA prodotto; se dunque MN è cubo di MZ, sarà come DE ad MN, così MN ad FI: Ma se è così; facciasi come IL ad LN, così LN ad un altra, e sia per esempio LR, e tirisi la parallela QR: sarà dunque per Euclide, come QR ad MN, così MN ad FI: ma era come DE ad IN cubo per gl'Oppositori, così MN ad FI; dunque DE, e QR, avendo l'istessa proporzione ad MN, ed FI, saranno uguali fra di loro, il che ripugna: e lo stesso avverrà in qualunque punto della M,18, che si voglia, che termini il cubo di MZ, fuori che nella EI, nel quale prolungandosi IE sino al punto 3 dell'asse; i trè cubi saranno nello stesso triangolo 3 FI, e non in triangoli diversi, e termineranno all'ipotenusa.

Ecco dunque che io hò chiaramente dimostrato per gl'elementi d'Euclide, che i cubi non possono terminare ne fuori, ne dentro della retta EI, e questa dimostrazione sarebbe certamente bastata ad ogni più scrupoloso geometra: contuttociò io feci a me stesso una superflua opposizione, la quale è la seguente interamente trascritta dal novo Metodo da me pubblicato l'anno 1715. L'opposizione è la seguente.

Non sò, ch'altro possano dire a questo i miei troppo scrupolosi signori Oppositori, se non che potrebbe avvenire, che dicessero, la terza proporzionale di LI, e di LN essere LT; dalla qual cosa n'addiverrebbe, che la parallela 12,T fusse uguale a DE8, e perciò fusse come FI ad MN, così MN a 12,T, ovvero DE; onde i cubi fussero nella stessa proporzione fra di loro, cioè come DE ad MN, così MN ad FI: Ma prolunghino essi la IE sino al punto 3 dell'asse, e

farò

farò loro vedere, che se questo fusse, l'angolo LIF sarebbe uguale all'angolo 31F, cioè il maggiore al minore.

Ora volendo ciò dimostrare, stimai li triangoli L,12 T, ed LFI, simili a i triangoli 3 DE, e 3 FI; e con ciò presi abbaglio, perchè son triangoli, ch' hanno due lati proporzionali a due lati, ed il terzo uguale al terzo, ma non han tutti i lati proporzionali a tutti i lati, come devono avere i triangoli simili: ma come che non nutrisco nell'animo la temeraria sentenza di essere infallibile, supplirò qui in appresso la mia dimostrazione, facendo conoscere, che la linea 12T non può esser terza proporzionale di MN, e di FI. Dimostrerò dunque, che la parallela MN non può esser mezza proporzionale frà la parallela 12 T uguale ad 8 unità AC, ed FI 27.

Se l' Avversario vuole, che MN sia mezza proporzionale frà 12 T, ed FI, la parallela MN sarà cubo dell' applicata MZ. Prolunghisi la DE uguale ad 8 unità fino al punto 11 dell' ipotenusa LI; e suppongasi la CF divisa in punti, o parti infinite. Io dimostrerò generalmente, che niuna parallela, che termina alla retta LI puol esser cubo della sua applicata corrispondente; e che per ciò MN non è mezza proporzionale frà 12 T, ed FI.

DIMOSTRAZIONE.

Perchè l' Avversario vuole, che tutti li cubi, come FI, MN, 12 T, ec. cadano nell' ipotenusa LI; tutti i cubi delle applicate intercette, frà CC1, e DO2, e frà DO2, ed FG3, caderanno successivamente nell' istessa ipotenusa LI: ma nel triangolo LFI, il cubo 8 dell'applicata DO 2, cade nel punto segnato 12 della retta LF; dunque il cubo dell'applicata immediato a DO caderà, per l'Avversario, in un punto sotto il punto 12, come per esempio, nel punto 20; ed il cubo della applicata immediata a DO2, sarà la parallela segnata 20, e 21, e così successivamente, per modo tale che nel triangolo FLI, li cubi delle applicate frà DO, ed FG caderanno tutti ne' punti non cor-

Tav.V. F.XXXI.

corrifpondenti alle applicate, cioè i cubi non faranno nelle applicate allungate, fino a tanto che nel triangolo LFI, all' applicata DO2 corrifponderà la parallela fignata D, 11 maggiore di DE uguale ad 8 unità AC.

Ma fe è così, la parallela D, 11 farà cubo d' una delle applicate intercette frà DO2, ed FG3; perchè la parallela D, 11 è maggiore di 8, e minore di 27: e lo fteffo avverrà di tutti gl'altri cubi, che fono fotto la D, 11, fino a tanto che MN farà cubo d' un applicata molto di fotto all' applicata MZ. Ma fe non è cubo dell' applicata MZ, ne meno è mezza proporzionale frà 12 T, ed FI, cioè frà 8, e 27; perchè, fe abbiamo fuppofto, che la radice MZ fia mezza proporzionale di DO2, ed FG3; ed il quadrato AM mezzo proporzionale frà il quadrato AD4, ed AF9: da ciò n'avviene, che fe MN è cubo, come vuole l'Avverfario, la parallela MN dev' effer mezza proporzionale frà DE8, ed FG27. Ma noi abbiamo dimoftrato, che la parallela MN non può effer cubo della radice MZ; dunque non può nè meno effer mezza proporzionale frà DE8, ed FI 27, ch' è ciò fi dovea dimoftrare: lo fteffo fi dimoftra, fe l'ipotenufa LI fi tiri con qualche angolo alla retta EI.

Dello fteffo modo fi dimoftra, che i cubi non poffono terminare dentro alla retta EI; perchè fe fi tira la retta I, 19, quefta taglierà il cubo DE8 nel punto fegnato col numero 7; e perciò nella retta I, 19 non vi è il cubo dell' applicata DO uguale a 2 unità: adunque i cubi delle applicate intercette frà DO2, ed FG3 non poffono terminare ad altra linea retta, che alla retta EI, la quale congiunge per i punti eftremi li cubi DE8, ed FI 27. E dello fteffo modo fi dimoftra, che i cubi intercetti frà CC1, e DO2 terminano alla retta CE.

CONSIDERAZIONE.

Qui mi fovviene, che potrebbe avvenire, che 'l dottiffimo Sig. D. Nicolò Galizia diceffe, ch' egli intende, che i punti A, C, E, N, ed I, fiano punti d'una

d'una curva: ed io li rispondo, che questo non è l'assunto, ch' egli, ed il Sig. Ariani hanno impreso di provare nella loro prima obbiezione pag.85.,e la quale il Sig.D.Nicolò s'è sforzato difendere nel suo scolio nel paragrafo,che comincia;*dopo stampata fin quì la presente scrittura&c.*;perchè in quella obbiezione hanno preteso solamente di dimostrare, che tutti li cubi possono terminare a qualunque linea retta fuori della retta EI; ond' è, ch'io altro non era tenuto di fare per rispondere a quella obbiezione, se non che dimostrare, che non possono terminare ad altra retta, che alla retta EI.

Per quello poi,che s'appartiene al dimostrare,che i cubi non possono terminare alla curva; io hò già nella mia antecedente Duplicazione del Cubo in più modi dimostrato,che le parabole piane, e le cubiche non hanno le proprietà,che se le assegnano;e che perciò i miei soli Rettilinei sono il vero luogo de i cubi delle radici: Leggano dunque quelle i miei dottissimi Avversarij.

Alla perfine mentre io hò provato, che i cubi non possono terminare ad alcuna linea retta fuori,o dentro della retta EI,e che non possono terminare ad alcuna curva; posso dire, avvalendomi de i termini espressivi dal Sig.D. Nicolò Galizia usati nell' antecedente suo scolio, cioè, che qualunque retta, o qualuque curva, che si possa trarre per tutta l'eternità fuori della mia retta EI, non potrà esser il luogo, nel quale cadono i cubi delle applicate allungate, ed intercette fra DO2, ed FG3; e che perciò solamente la linea MS, la quale termina alla retta EI, e non altra, è il cubo dell'applicata MZ.

Ecco dunque,che perche la nostra dimostrazione era vera, ma mal dimostrata, ci è stato agevole cosa il supplirla. Rimane ora, che il Signor D. Nicolò Galizia dimostri, che i quadrati delle applicate terminano al perimetro della parabola Apolloniana; dimostri, che Galileo pone le applicate in siti uguali, come le pone esso, e tutte le altre belle specolazioni in quel suo breve scolio contenute: ovvero da sincero, qual' egli è con-

fessi, come hò confessato iò, gl' abbagli, che hà presi; ed io di più ingenuamente confesso, che 'l Signor D. Nicolò potea notare molti altri miei abbagli nella risposta, da me fatta alla sua obbiezione l'anno 1715., perchè in quella risposi bensì per quanto bastava a far conoscere, che la sua obbiezione non poteva offendere la mia Invenzione mentre dissi, ch'egli non seguiva la mia Ipotesi; ma poscia proseguendo il discorso non ragionai molto a proposito intorno alle proprietà, che i sig. geometri assegnano alla parabola cubica; e la ragione di ciò fù, ch'io occupato nella moltitudine delle opposizioni, non ebbi tempo di considerar le proprietà delle parabole cubiche, le quali, come cose de' sig. moderni, non mi era dato briga di molto studiare: Intendeva però bene Apollonio, ed il modo, col quale Galileo ci insegnò di descrivere la parabola piana, e mi contentava d'avere, per lo mezzo di quello, ritrovato il luogo de cubi essere alle mie linee rette; ne mi curava di cercare a qual luogo i sig. moderni facessero terminare i cubi: ma poscia ritrovandomi inviluppato in un labirinto di curve, m'ingegnai di ben studiarne le proprietà; e ciò fatto supplij agl' abbagli da me presi, publicando una Lettera diretta al gentilissimo, e dottissimo Signor D. Paolo Francone Marchese di Salcito, il di cui titolo è: *Considerazioni intorno alle parabole di grado superiore*; qual lettera e questa, che si legge quì appresso: ma prima voglio narrare in ristretto le obbiezioni con le mie risposte.

RISTRETTO

Di tutte le antecedenti Obbiezioni.

QUelle, che hò narrate sono tutte le opposizioni, che hà ricevuto la mia Duplicazione del cubo, alle quali ogn' uomo, che hà idea di dimostratione geometrica, puo conoscere aver io pienamente soddisfatto; perchè tutte le sopranarrate obbiezzioni o son fatte sopra ipotesi diversa dalla mia, o son tali, che ripugnano a dirittura agl'

ele-

elementi di Euclide, alle proprietà da Apollonio asserite, ed alle cose più note; che sia così.

Nella prima obbiezione i mei Oppositori suppongono una proprietà, che riguarda le linee rette, quando io ragiono de' cubi, o siano quarte proporzionali; ed ecco, che non sieguono la mia ipotesi: Ma oltre a ciò ponendo essi un' ipotesi tutta diversa dalla mia, suppongono, che i cubi infiniti intercetti frà il cubo 8, e 27. possano terminare ad una linea retta, la quale non passi per il punto estremo del cubo 8 da me fatto per costruzione; la qual cosa appare da se medesima falsissima; imperciocchè i cubi delle radici intercette frà 2, e 3 devono essere dentro i limiti de i cubi 8, e 27, la qual cosa non può avvenire, quando la linea retta, o curva, che si voglia che sia, non passa per i punti estremi di 8, e 27.

Nella seconda obbiezione i miei Oppositori sieguono la mia ipotesi, ma nel dimostrare errano a dirittura contro gl' elementi d' Euclide; imperciocchè formano, siccome hò fatto vedere, l'analogia delle quattro seguenti quantità, cioè 1, 3, 7, e ♈ 8 — 1, e moltiplicando i mezzi per gl' estremi, pretendono ritrovare la quarta proporzionale, o sia il cubo; e con ciò non s' avvedono, che paragonando trè quantità razionali colla quarta, ch' è irrazionale, errano contro la X del X d'Euclide, in quella guisa appunto, che il Signor Monforte lo hà a loro notato nella sua Lettera a me diretta poc' anzi riferita.

Nella terza opposizione, che 'l gentilissimo, e dottissimo Anonimo chiama per sua gentilezza avvertimento, egli prende meccanicamente sopra l'asse il quadrato della ♈ $2\frac{1}{2}$, che è $6\frac{1}{4}$; poi calcola in numeri il cubo, e si affatica di dimostrare per la via de' triangoli simili, che 'l cubo deve terminar dentro della mia linea retta tirata per i punti estremi de i cubi 8, e 27; e con ciò egli non s' avvede, che cade nel meccanico, perche è costretto a determinare sù l' asse quel punto, ch' egli suppone esser punto estremo del quadrato $6\frac{1}{4}$, donde ne è avvenuto, che io le abbia a buona ragione rispo-

sto, che il termine del quadrato 6 $\frac{1}{4}$ sarà un poco più al di sopra del punto, ch' egli determina sù l'asse, e con ciò il cubo terminerà alla mia linea retta.

Nella quarta opposizione poi il dottissimo, e gentilissimo Sign. D. Bartolomeo Intieri mi oppone incontro la parabola cubica del secondo genere, la quale in vero era la sola, che mi si potea opponere, a cagione, che siccome hò più volte detto in questo Libro, quelle sì fatte curve erano state da tutt' i matematici ricevute per linee geometriche; ed egli in particolare per tali le riputava, mentre sù di quelle avea dottamente scritto, quanto alcun altro de i moderni geometri abbia mai scritto sù di tal materia: con tutto ciò però egli non si diede briga d' esaminare la mia ipotesi, come dovea fare nell' esame di una novella Invenzione; non lasciò però di conoscere, ch' egli era tenuto a ciò fare, ma credette di potersene dispensare sù la considerazione, che altri aveva impreso di dimostrarmi l'abbaglio, che male a proposito supponevano, che io avessi preso.

Dopò queste obbiezioni, che furono le prime, che si pubblicorono contro il mio nuovo Metodo, li Sig. Agostino Ariani, e D. Nicolò Galizia forse dentro il lor animo non contenti delle loro prime obbiezioni, fecero, come si è veduto, le seconde, senza però confessare, com' era lor obbligo, i manifesti abbagli, che avevano presi nelle prime: il Sign. Ariani fece la lettera da me riferita, il di cui titolo è: *Osservazioni sù d' una lettera del Signor Monforte &c.* ed a quella rispose in mia vece il Signor Bonelli, perchè conteneva cose contro il buon costume.

Viene poi in campo coll' antecedente sua scrittura il Sign. D. Nicolò Galizia, e spiega sinteticamente la parabola cubica del secondo genere, e con ciò non solo non siegue la mia ipotesi, ma altra cosa non fà, che far la sintesi alla quarta opposizione del Sig. D. Bartolomeo Intieri portata per la via analitica; e nello stesso tempo mostra di essersi dimenticato della proprietà della parabola Apollonia-

loniana; e commette tanti abbagli, quanti son quelli, che abbiamo mostrato essere nello scolio della sua scrittura. Questo dunque è quello, che si contiene nelle obbiezzioni de' miei Sig. Contrarij, alle quali non solo mi sembra di avere ampiamente soddisfatto anco à giudicio di quegli huomini, che sono mezzanamente instrutti nella Geometria; ma di avere, rispondendo ad ogni opposizione, portato una nuova dimostrazione generale della mia proposizione, per modo tale, che la mia Invenzione viene in moltissimi, e diversi modi dimostrata: Con tutto ciò però i miei Sign. Oppositori non si sono dichiarati espressamente soddisfatti; posso bensì credere in virtù del silenzio, che hanno usato, che abbino conosciuta la verità delle mie dimostrazioni.

Il bello però si è, che in questa mia Invenzione della Duplicazione del Cubo sono stato da alcuni signori matematici frà essi collegati contro di me, dipinto a i giovani studiosi nella figura di un huomo, che avesse pubblicato una cosa alla letteraria repubblica perniciosissima, e da celarsi nel più cupo fondo della terra per modo tale, che pare avessero formato frà essi come una lega, nella quale tacitamente si fusse frà essi convenuto di celare tutto il mistero, che discopre il falso di tutta la loro nuova geometria; perchè a qualunque geometra, che si addimandava, se le mie proposizioni erano bene, o mal dimostrate, subito se li vedeva usare un aria di silenzio, appunto come sarebbe un huomo, che volesse sfuggir di ragionare intorno a materia pericolosa alla santa Religione attinente; e se poi alcuno de i matematici avesse fatto comparire qualche segno di sincerità, lodando la mia Invenzione, subito li minacciavano il biasmo universale della Repubblica, per modo tale, che ogn' uno si rimaneva di studiare le mie proposizioni, o studiandole, di confessarne il lor vero sentimento. Con tutto ciò però per molte, che siano state le arti, che ugualmente da i scoverti, che dagli occulti miei Contrarj sono state praticate, non han potuto ottenere, che a lungo

anda-

andare quelli ancora, che non vogliono ſtudiare le mie propoſizioni, non abbino donde avvederſi, che le oppoſizioni de miei Contrarij non ſono ſtate ſuſſiſtenti: Imperciocchè il vederſi, che l'accademia di Lipſia niun conto hà tenuto delle oppoſizioni de miei Contrarij, ma che all'incontro a tutto ſuo potere, ſi è affiticata di farne delle altre, alle quali io hò pienamente ſoddisfatto nella Lettera, che ſi legge nel fine di queſto libro, è un argomento baſtante a perſuadere a chi hà il ſolo naturale lume della ragione, che le oppoſizioni ſono ſtate vane, e inſuſſiſtenti. A quelli poi, che ſon capaci d'intendere una dimoſtrazione ſintetica, ſi appreſentano a prima viſta gli errori, che alcuni miei Contrarij han commeſſi contro i primi elementi della Geometria.

LET-

LETTERA
DEL SIGNOR
D. PAOLO-MATTIA
DORIA
AL SIGNOR
D. PAOLO FRANCONE
MARCHESE DI SALCITO.

Contenente alcune considerazioni sopra le para-
bole di grado superiore.

AL SIGNOR

MARCHESE

DI

SALCITO

PAOLO-MATTIA DORIA

Voi, più che ad ogn' altro, gentilissimo Sig. Marchese, mi veggo tenuto indrizzare i miei pensieri; perche Voi siete quello, che in una vostra degnissima Opera avete francamente promesso quello, che io poi nel mio Nuovo Metodo hò pubblicato: Ma più d'ogn'altra cosa, perche Voi siete quello, in cui hò scorto un cuor sì costante, e sincero, ed una mente sì giusta nel ragionare di tutte le materie, ed in particolare delle geometriche, in modo che da Voi posso sperare un benigno gradimento di tutte quelle cose, che da me vengono.

Questa appunto fù la cagione, per la quale alcuni anni sono v'indrizzai certe mie considerazioni 'ntorno alle parabole di grado superiore da' signori moderni geometri inventate: ma in quel tempo, spaventato ancor io dalla moltitudine de' seguaci delle curve d'Apollonio, non ebbi ardimento di espressamente dire, che la parabola Apolloniana non hà le proprietà, che da Apollonio se l' assegnano; mi contentai però solamente d' accennare nel XI. proposizione del mio Nuovo Metodo stampato in Anversa l'anno 1715. che 'l perimetro della parabola Apolloniana

si componeva di linee rette; dalla qual cosa chiaramente si deduceva, che 'l perimetro della parabola Apolloniana non poteva essere una curva; contuttociò però non lo dichiarai espressamente.

Dell' istesso modo, ragionando con Voi delle parabole cubiche, mi contentai dire, che le proprietà, che i signori moderni geometri ritrovano nelle loro parabole cubiche, io le ritrovava ne' miei Rettilinei, senza dichiarare espressamente, che le loro parabole cubiche non potevano avere le proprietà, ch' essi le assegnano; quantunque ciò si deducesse per necessaria conseguenza dalle mie dimostrazioni. Ora però che mi sono apertamente alzato contra la parabola Apolloniana medesima con tante evidenti dimostrazioni, quante son quelle, che si leggono nella Raccolta delle dimostrazioni da me fatte intorno a tal materia, la quale si legge nel principio di questo libro dalla pag. 1. sino alla 53. Voglio un' altra volta dimostrarvi, che le parabole cubiche da sig. moderni geometri inventate non hanno le proprietà, ch' essi le assegnano; ma che quelle medesime proprietà, ch'essi han pensato male a proposito di ritrovare nelle loro curve di grado superiore, si ritrovano ne'miei Rettilinei parabolici cubici. Gradite vi priego mio Riverito Sig. Marchese queste mie considerazioni con quella stessa bontà d' animo, colla quale siete solito rimirare tutte le cose, che da me vengono, ed attendete a quello, che imprendo di dimostrarvi.

Per dimostrarvi, che le parabole di grado superiore non hanno le proprietà, che da sig. moderni geometri se le assegnano, basterebbe a me l' aver dimostrato chiaramente, siccome hò fatto nella Raccolta, che la parabola Apolloniana, o sia la parabola piana, non hà le proprietà, che da Apollonio se le assegnano; perchè le parabole cubiche sendo dedotte dalle piane, se le piane non hanno le proprietà, che Apollonio le assegna, le cubiche non possono certamente aver le proprietà, che i sig. moderni geometri le assegnano. Contuttociò però essendo mia inten-

ten-

tenzione farvi conoſcere, che ſe i miei Sig. Oppoſitori non fuſſero ſtati tanto fortemente attaccati all' opinione, che 'ntorno alle curve avevano, ed aveſſero conſiderata la mia Ipoteſi, avrebbero inteſe le proprietà de' Rettilinei da me ritrovati, i quali hanno quelle proprietà, ch'eſſi aſſegnano alle lor curve: Voglio di nuovo brievemente, accennandovi il modo, com' eſſi le ſpiegano, farvi conoſcer la vanità delle loro Invenzioni fatte sù le curve. Le formole, colle quali ſpiegano la proprietà delle loro parabole cubiche, ſon le ſeguenti.

La prima formola. *Il cubo dell' applicata all' aſſe è uguale al ſolido, che ſi produce dal quadrato dell' intercetta nell' unità*: ovvero la ſeguente, che è la medeſima. *Se saranno quattro linee continue proporzionali, il cubo fatto ſopra la terza ſarà uguale al parallelepipedo fatto sù 'l quadrato della quarta coll' altezza della prima.* La ſeconda formola poi è la ſeguente. *Il cubo dell' applicata all' aſſe è uguale al ſolido, che ſi forma della porzione dell' aſſe nel quadrato dell' unità.* Diamo ora l' eſempio in numeri delle due antecedenti formole.

Siano quattro continue proporzionali 1, 2, 4, 8; Il cubo di 4, ch' è 64, è uguale al quadrato di 8 moltiplicato per l' unità; in queſta guiſa il cubo della terza è uguale al parallelepipedo fatto dalla quarta con l'altezza della prima. E perchè il 4 ſi ſuppone eſſer ſempre l' applicata all' aſſe della parabola cubica; da ciò ne avviene, che il cubo dell' applicata ſia uguale al ſolido, che ſi produce dal quadrato dell' intercetta, ch' è 8, nell' unità. Diamo ora l' eſempio della prima formola della parabola cubica del primo genere.

Siano le quattro continue proporzionali. 1, 2, 4, 8. Il cubo di 2, ch' è 8, è uguale al ſolido fatto da 8 moltiplicato per il quadrato dell' unità, che vale a dire per l' unità: le antecedenti ſon le formole. I sig. moderni geometri però non avevano ancora ritrovato l' arte di ſpiegare in numeri, ed in linea l' unità, e l' applicata 4, e l' intercetta 8; e la cagione, per la quale non avevano ritrovato queſta arte, era ſolamente, perchè non avevano conſiderato quello, che ſi

poteva dedurre dal modo, col quale Galileo ci hà insegnato descriver la parabola Apolloniana, cioè, designando le applicate co' i numeri, 1, e 2, e l' asse col numero 4: perche, se avessero considerato il sopradetto modo, avrebbero ritrovato, come io hò ritrovato, che tanto il perimetro della parabola piana, quanto quello della parabola cubica del secondo genere si compone di linee rette determinate da' punti determinati; che sia così.

Il dottissimo Sig. D. Bartolomeo Interi nella sua oppposizione, che si legge alla pag. 93, e 94, spiega la proprietà della parabola cubica colla prima formola da noi descritta. Il gentilissimo Sig. D. Nicolò Galizia la spiega col secondo modo, col quale si spiega la medesima prima formola; ma ne l' uno, ne l' altro disegna col numero alcun' applicata, ne alcuna porzione dell'asse; e con ciò, non seguendo la mia ipotesi, si figurano di trovar nella curva quelle proprietà, che io hò dimostrato trovarsi nella retta; e questa è la cagione, per la quale non hanno inteso le proprietà de' miei Rettilinei parabolici cubici. Vi farò vedere ora brevissimamente, che se avessero considerate quelle applicate, e quelle ascisse in numero, quali io hò considerate, avrebbero ritrovate quelle proprietà, che hò dimostrato essere alla retta. Veniamo alla pruova.

Tav. IV. Fig. XXVIII.

Il Sig. D. Nicolò Galizia descrive, siccome hò detto a lui rispondendo, la parabola piana AGN, col parametro AB, coll' asse AE. Dipoi prende OH terza proporzionale dell' unità AB, e dell' applicata CL. Indi prende PI terza proporzionale dell'unità AB, e dell' applicata DM. In appresso prende QF terza proporzionale dell' unità AB, e dell' applicata EN, e tira la BG uguale all' unità AB, e conchiude, che i punti A, G, H, I, F, sono punti di perimetro di parabola cubica, il di cui asse è AQ, e le applicate della quale sono KG, OH, PI, e QF, e con ciò mira la parabola cubica del secondo genere come una curva.

Ma se all' incontro, discendendo più al particolare, come hò fatto io, avesse detto: Dividasi l'asse AE in nove parti uguali, e che, per esempio, AB sia 1 delle nove parti agua-

uguali;AD,sia 4;Poi applichisi al punto D la DM uguale a 2 unità AB, e la EN uguale a 3 unità AB; avrebbe ritrovato, che la terza proporzionale di AB1, e di DM2, e 4, e che perciò l' applicata PI della parabola cubica è 4. Dell' istesso modo avrebbe ritrovato, che la terza proporzionale di AB1, e di EN3, è 9; e che per ciò l' applicata QF è 9. Se poi avesse ordinato, come io hò ordinato, che dal punto D si tiri la DI uguale ad 8 unità AB, e perciò cubo di DM2;e che dal punto E si tiri la EF uguale a 27 unità AB, e che da i punti G, I, ed F si alzino le perpendicolari GK uguale ad 1, IP uguale a 4, FQ uguale a 9; e che poscia si tiri la AQ uguale,e parallela ad EF; e dopo tutta questa costruzione avesse ordinato, che per i punti A, G, I, F si tirassero, in vece della curva, le linee rette AG, GI, IF, avrebbe ritrovato la stessa proprietà, ch' egli assegna malamente alla curva, nelle linee rette GI, IF; ed eccone la pruova.

PI, che termina per costruzione al punto estremo della retta GI, è applicata di parabola cubica, perchè sono quattro continue proporzionali, cioè AB, DM, PI, ed AP. Ma per costruzione AB è 1, DM, 2, PI,4, ed AP è 8: dunque il cubo di PI è 64, uguale al parallelepipedo fatto dal quadrato di AP8, coll'altezza di AK unità; ed ecco,che abbiamo due applicate di parabola cubica, le quali terminano a i punti estremi della retta GI, cioè PI, e KG. Rimane solamente di dimostrare, che la retta HO termina alla retta GI non alla curva: Ma questo lo abbiamo dimostrato nella quarta proposizione della nostra Duplicazione del cubo;ed in appresso lo abbiamo dimostrato in sette modi diversi nella Raccolta, e perciò è superfluo il replicar di nuovo le medesime dimostrazioni. Dell'istesso modo;il cubo di QF9 è 729 uguale al parallelepipedo fatto dal quadrato di AQ27 per l' unità AK, onde se si tira la retta IF; le due applicate PI4, e QF9, saranno ne'punti estremi di una retta linea,e tutte le applicate intercette frà PI,e QF termineranno alla retta IF, siccome abbiamo dimostrato nella quarta proposizione della nostra Duplicazione del cubo. Ecco dunque,

que, che anche in numeri si vede, che 'l perimetro della parabola cubica del secondo genere si compone delle linee rette AG, GI, IF: dalla qual cosa ne avviene, che tanto il Sig. Galizia, quanto il Sig. Interi, se si fussero degnati di considerar la mia Ipotesi, avrebbero conosciuto, che il mio Rettilineo parabolico cubico hà le proprietà, ch' essi con tutti i moderni geometri malamente assegnano alla loro parabola cubica considerata come una curva. Vi farò ora vedere come i cubi delle applicate alla parabola piana si ritrovano nell'ipotenusa di un triangolo rettangolo.

PROPOSIZIONE.

LA quale è la medesima, che la XII. del nostro Nuovo Metodo stampato in Anversa l' anno 1715. per Cristofaro Plantini.

Sia descritta nel modo da noi insegnato nella prima proposizione della Raccolta la parabola ADH, il di cui asse sia AG; e siano fatti i cubi CF8, e GL27, cubi delle applicate CD2, e GH3. Tutti i cubi delle applicate intercette frà BB1, e CD2; frà CD2, e GH3 termineranno all' ipotenusa di un triangolo isoscele, e rettangolo, il di cui lato è la retta GL uguale a 27 unità AB.

COSTRUZIONE.

Tav. V. Figura XXXII.

SUppongasi nel modo da noi insegnato nella Raccolta, fatta la figura, dentro la quale sia la parabola ADH, l' asse della quale sia AG uguale a 9 unità AB, ovvero BB uguale ad AB. E suppongasi similmente tirata l' ipotenusa AI del triangolo AGI isoscele, e rettangolo in G, alla quale ipotenusa terminino tutti i quadrati delle applicate, per la seconda proposizione; e suppongasi tirata la CF uguale ad 8 unità AB, e la GL uguale a 27, cubo di GH3; e le due linee rette BF, ed FL, le quali congiungano per i punti estremi i cubi fatti per costruzione. Di poi si prolunghi l' asse GA fino in M, di modo che GM sia tripla di GA, cioè ugua-

uguale a GL fatta uguale a 27 unità AB, e chiudasi il triangolo MGL rettangolo in G. Indi dalla MG taglisi la MN uguale all' unità AB; e la MO uguale a CF, o sia ad 8 unità AB, e dal punto N tirisi la NN uguale ad MN, e parallela a CF, e dal punto O tirisi la OP parallela a CF, ovvero GL, ed uguale ad MO; ed il rimanente NG dell'asse MG, si concepisca diviso in punti infiniti; e s' intendano nel triangolo MGL, dagl' infiniti punti della NG, tirate infinite linee parallele a GL, le quali terminino all' ipotenusa ML, come sono le parallele designate co' i numeri 11, e 12, 16, e 18, e tutte le altre. Da i punti della BG, porzione dell' asse AG, s' intendano tirate tante parallele alla GL, le quali terminino nelle due linee BF, ed FL, quanti sono i punti della BG, e siano, per esempio, le parallele designate 6, e 47, X, e K, e tutte le altre. Indi da tutti i punti estremi d' esse parallele si alzino tante perpendicolari, le quali terminino nella ML, come per esempio, la perpendicolare designata 47, e 12; e la perpendicolare K, e 22, ec. In questo modo avremo nelli due spazj BCFB, CGLF tante parallele, quanti sono i punti della BG, le quali corrispondono ad una porzione delle parallele infinite intercette frà NN, e GL nel triangolo MGL. Dico, che tutte le parallele, che partono da i punti della BC, e terminano alla BF, sono cubi delle applicate intercette frà CO, e BB, ogn' una alla sua applicata corrispondente, come XK cubo di XY ec.; e che sono in proporzione aritmetica.

DIMOSTRAZIONE.

GM 27 è terza proporzionale di GH3, e di GA9; ed MO8 è terza proporzionale di CD2, e di CE4; dunque dentro i limiti di MN unità, e di MO8, vi sono tutti i cubi delle applicate intercette frà BB, e CD; e dentro i limiti di MO 8, e di MG27, vi sono tutti i cubi delle applicate intercette frà CD, e GH; perchè niun cubo delle applicate intercette frà BB1, e CD2, può esser minore

nore di 1, ne maggiore di 8; e niun cubo degl' intercetti frà CD2, e GH3 può esser minore di 8, nè maggiore di 27. Dunque ne i limiti di MN, di MO, e di MG, vi è la somma di tutti i cubi delle radici intercette frà BB1, e CD2, e frà CD2, e GH3.

Ma le parallele intercette frà NN, ed OP sono uguali alle parti dell'asse, cioè la parallela 11, e 12, uguale ad M, 11; e tutte le altre, perchè MN essendo uguale ad NN, ed MO uguale ad OP; tutti gl' altri triangoli intercetti frà i triangoli MNN, MOP sono ancora isosceli: Adunque tutte le infinite parallele, le quali terminano ad NP, saranno successivamente cubi delle applicate intercette frà CD, e BB: e dello stesso modo, tutte le parallele intercette frà OP8, e GL27, le quali terminano all' ipotenusa ML, saranno cubi delle applicate intercette frà CD2, e GH3: Dunque i cubi delle applicate terminano all' ipotenusa del triangolo rettangolo.

Ma noi abbiamo supposto tirate da i punti della BC tante parallele a CF, quanti sono i punti della BC; dunque, se dagl' infiniti punti della BF si alzeranno tante parallele ad MG, le quali terminino all' ipotenusa ML; tutte le parallele intercette frà BB unità, e CF8 saranno cubi delle applicate intercette frà BB unità, e CD2; perche, se si alzano le perpendicolari FP, e BN; CF, ed OP8 sono uguali frà loro, come lati di paralleligrammi; BB unità, ed NN unità sono uguali frà di loro; e tutte le altre, come XK uguale alla linea segnata co' i numeri 7, e 22, e lo stesso di tutte le altre.

Tav. V. Figura XXXII.

Ma tutte le intercette frà NN, ed OP sono cubi delle applicate intercette frà BB1, e CD2; dunque anche tutte le parallele intercette fra BB1, e CF 8 saranno altresì cubi delle intercette frà BB unità, e CD2; dunque i cubi delle applicate terminano ancora all' ipotenusa ML, ch' è ciò si dovea dimostrare.

CON-

CONSIDERAZIONE.

Deesi considerare, che quantunque nell' antecedente proposizione abbiamo dimostrato, che i cubi delle applicate intercette frà BB1, e CD2; frà CD2, e GH3 siano nel triangolo isoscile, e rettangolo MGL: contuttociò però i cubi corrispondenti alle applicate all' asse della parabola Apolloniana, o per dir meglio all' asse del nostro Rettilineo parabolico piano, si ritrovano solamente nelle nostre due linee rette BF, ed FL, alle quali terminano i cubi, che nascono dalle applicate allungate, perchè tutti i cubi, che terminano all'ipotenusa ML sono bensì ognuno uguale ad uno de'cubi intercetti frà BB1, e CF8, e frà CF8, e GL27; ma non essendo nelle applicate allungate, non sono corrispondenti alle applicate, come a cagion d'esempio; nell'ipotenusa ML, la parallela OP uguale a CF8 è cubo dell' applicata CD2, ma non è corrispondente all' applicata CD, perche non è nell'applicata CD allungata: dalla qual cosa ne avviene, che tutti gl' altri cubi intercetti frà OP8, e GL27 non siano corrispondenti alle applicate; perche la parallela, che parte dal punto immediato al punto O, come dal punto segnato 25, sarà cubo d' una applicata intercetta frà CD2, e GH3, e lo stesso avverrà di tutte le altre; ma non saranno corrispondenti alle applicate, perche non si ritrovano nelle applicate allungate. Dalla qual cosa si deve considerare, che niuna linea retta fuorche le nostre, le quali congiungono per i punti estremi i cubi 1, ed 8, 8, e 27, ec. come per esempio, BF, ed FL, può essere il luogo generale de cubi corrispondenti alle applicate, appunto come abbiam detto nell' antecedente risposta al Sig. Galizia.

Da quello, che abbiamo dimostrato nell' antecedente proposizione, il Sig. Monforte prese motivo di confermare la nostra proposizione, dimostrando per lo mezzo del calcolo analitico, che i cubi delle applicate ancora terminano all' ipotenusa del triangolo rettangolo, ed isoscile, e ciò facendo si servì della parabola cubica del primo genere, le proprietà della quale ora vogliamo spiegare

quì appresso, servendoci del seguente lemma riferito da Rinaldino; e vogliamo spiegarla a fine di far conoscere, che non hà le proprietà, che i signori moderni geometri le assegnano.

LEMMA.

SE sono quattro linee continue proporzionali, il cubo fatto sopra la seconda sarà uguale al solido fatto dalla quarta nell' altezza del quadrato della prima.

DIMOSTRAZIONE.

Tav. V. Fig. XXXIII.

SIano quattro linee continue proporzionali A, B, C, D. Dico, che il cubo fatto sopra B è uguale al solido fatto da D nel quadrato della prima A.

Perchè i detti lati sono in continua proporzione, sarà il quadrato fatto sopra A al quadrato fatto sopra B, come il quadrato fatto sopra C, al quadrato fatto sopra D: e dell' istesso modo, come il quadrato fatto sopra A al quadrato fatto sopra B, così il quadrato fatto sopra B al quadrato fatto sopra C: e come il quadrato fatto sopra B al quadrato fatto sopra C, così il quadrato fatto sopra C al quadrato fatto sopra D.

Ma per Euclide il quadrato fatto sopra la terza C al quadrato fatto sopra la quarta D, è come la seconda B alla quarta D; dunque sarà, come il quadrato di A al quadrato di B, così B ad D; dunque il solido fatto dagl' estremi, cioè A, e D; è uguale al solido fatto dal quadrato di B moltiplicato per l' istesso lato B.

Ma il solido fatto dal quadrato di B per l' istesso lato B, è il cubo della seconda B: ed il solido fatto dalla linea D per lo quadrato A è il solido fatto dalla quarta per lo quadrato della prima; dunque abbiamo dimostrato ciò che s'era proposto.

Lo stesso si vede manifestamente in numeri: Siano le quattro quantità A, B, C, D; 1, 2, 4, 8, il cubo del secondo

do numero 2, è 8, uguale al solido, che nasce dal quarto numero 8 moltiplicato per lo quadrato dell'unità. Spieghiamo ora in consequenza di questo lemma la parabola cubica del primo genere.

COSTUZIONE.

Tav. V. Figura XXXIII.

Descrivasi la parabola piana ABDH, secondo l'ordine de' numeri pari, ed impari, cioè che l'asse sia uguale a 9 unità AB, AC uguale a 4, GH uguale a 3, CD uguale a 2: e suppongasi descritta tutta la figura ABGLFA nel modo prescritto nella mia V. proposizione.

Di poi prolunghisi l'asse GA sino in M, di modo che GM sia uguale a GL27, e prendasi l'unità MN uguale all'unità AB della parabola piana ABDH, e facciasi la NN parallela a GL, ed uguale all'unità MN, e taglisi dalla GM la porzione MO uguale ad 8 unità AB, ovvero MN, e perciò cubo di CD2; indi dal punto O tirisi la perpendiculare OV uguale all'applicata CD2, e dal punto N tirisi la linea retta NN uguale, e parallela all'unità BB; poscia sopra la MG27 prendasi la MO uguale ad 8, e tirisi la OP parallela a CF, la quale OP, per il triangolo isoscile, è uguale a CF; e per i punti M, N, V, H, intendasi descritta la curva M N V H, la quale per l'ipotesi de sig. moderni geometri è la parabola cubica del primo genere. Dico, che questa non ha la proprietà, che se l'assegnano.

DIMOSRAZIONE.

La proprietà della parabola cubica del primo genere è, che il cubo dell'applicata all'asse sia uguale al solido, che si forma dalla porzione dell'asse nel quadrato dell'unità: Ma MN, ovvero AB, è 1; OV, ovvero CD è 2; AC è 4; ed MO e 8: dunque sono quattro continue proporzionali MN, OV, AC, ed MO; dunque per lo lemma antecedente, il cubo fatto dalla seconda OV2, il quale è 8,

è uguale al solido fatto da MO8 per lo quadrato della prima MN; dunque OV è applicata di parabola cubica del primo genere.

Dell' istesso modo MN, ovvero AB unità, GH3, GI9; GM27 sono quattro continue proporzionali, e perciò il cubo di GH è uguale al solido fatto dalla quarta GM per lo quadrato della prima MN; dunque GH è applicata di parabola cubica del primo genere; dunque abbiamo trè applicate di parabola cubica del primo genere, cioè NN, OV, GH, dunque MNVH è parabola cubica del primo genere. Dunque per la supposizione de sig. moderni geometri tutte le applicate alla curva M N V H saranno radici cubiche de' cubi intercetti fra MN1, e MO8, e fra MO8, ed MG27; la qual cosa si dimostra non esser vera, ed eccone la pruova.

Se si suppone, come abbiamo noi supposto, che l' asse MG sia 27, cioè quarta proporzionale di AB1, dell' applicata GH3, e del quadrato GI, ovvero AG9: dentro i limiti di MN1, e di MO8 vi sarà la somma di tutti i cubi delle radici intercette frà BB1, e CD2; e dentro i limiti di MO8, e di MG27 vi sarà la somma di tutti i cubi delle radici intercette frà CD2, e GH3.

Ma se si suppone, come vogliono i signori moderni geometri, che le applicate alla curva MNVH siano radici; le applicate alla curva, cioè alla parabola cubica MNVH saranno maggiori in numero, che le applicate alla parabola piana ABDH; e fuorche NN1, OV2, e GH3, le quali sono fatte per costruzione, tutte le altre applicate, che si considerano nella parabola cubica sono maggiori in lunghezza delle applicate all' asse della parabola piana ABDH: dunque se ne i limiti di MN, e di MO; di MO, e di MG vi è la somma de' cubi delle applicate alla parabola piana, le applicate alla parabola piana comprendono tutta la somma delle radici cubiche de' cubi intercetti fra MN1, ed MO8; e fra MO8, ed MG27: ma se è così; nella parabola cubica MNVH non vi puol esser la somma delle radici cubiche de' cubi intercetti fra MN, ed MO:

MO, fra MO, ed MG; perche la parabola cubica MNVH è molto maggiore della piana ABDH. Dunque le applicate alla parabola cubica non sono radici cubiche de' cubi contenuti nell' asse MG, e perciò l'asse MG non rappresenta i cubi delle applicate alla parabola cubica.

Ma se l' asse MG non rappresenta i cubi delle applicate alla parabola cubica del primo genere, le applicate alla parabola cubica non sono radici; ma ne meno sono quadrati, perche GH3, OV2 non sono quadrati, mentre sono radici per costruzione; dunque se le applicate, che terminano alla parabola cubica non sono radici, e non sono quadrati, la parabola cubica del primo genere non hà le proprietà contenute nell' antecedente lemma, ne hà alcuna conosciuta proprietà, che è ciò si dovea dimostrare.

L'abbaglio dunque, che prendono i signori moderni geometri intorno a questa parabola cubica del primo genere, dipende dall' errore generale, nel quale sono caduti, considerando la parabola Apolloniana, o sia piana al modo d'Apollonio; perche, siccome costruendo essi la piana senza determinar le applicate 1, 2, e 3, non han potuto conoscere, che le radici non terminano alla curva: per l'istessa cagione non potevano conoscere, che la parabola cubica non poteva essere il luogo delle radici de' cubi, a cagion che la somma delle radici de' cubi si ritrova nella parabola piana.

CONSIDERAZIONE I.

DA quel che abbiamo detto intorno alle parabole cubiche del primo, e secondo genere, chiaramente si conferma quello, che abbiamo asserito ragionando della parabola piana cioè, che tutto ciò, che non si descrive col cerchio, e con la riga non può avere in Geometria conosciute, e costanti proprietà; onde si vede coll' esperienza, che quando Renato des-Cartes propose a' geometri di ampliar la dottrina delle curve, gli distolse dallo studio della vera scienza, e gli impegnò in quello di una

di una ſcienza vana, e chimerica, ſiccome abbiamo ampiamente dimoſtrato nella Diſſertazione, dove abbiamo provato, che il perimetro della parabola piana, la quale è il fondamento delle cubiche ſi compone di linee rette.

CONSIDERAZIONE II.

MA quì dirà alcuno, che il Sig. Monforte ancora nella ſua lettera, che ſi legge pag.97, e 98 di queſto libro, hà ſuppoſto deſcritta queſta parabola cubica del primo genere; perchè nel calcolo analitico, che fà per dimoſtrare, che i cubi terminano all' ipotenuſa del triangolo iſoſcile, egli ancora ſuppone, come ſi vede nella Fig. 25, deſcritta queſta parabola cubica.

A queſto ſi riſponde, che il Sig. Monforte altra intenzione non ebbe ſe non di far la dimoſtrazione alla XII. propoſizione del mio Nuovo Metodo ſtampato in Anverſa l'anno 1715. per Criſtofaro Plantini, nella quale io aveva dimoſtrato, che i cubi terminano ancora all' ipotenuſa del triangolo iſoſcile; e per ciò fare egli s' appigliò al partito di far conoſcere, che quantunque ſi conceda, che le parabole cubiche abbiano le proprietà, che i signori moderni geometri a quelle aſſegnano, i cubi delle applicate terminano all' ipotenuſa di un triangolo rettangolo, e con ciò fece, come avea io fatto riſpondendo a' miei sig. oppoſitori; perche in quelle riſpoſte, ed in queſta Lettera io ancor hò ſuppoſto com' eſſi vogliono, la parabola piana come una curva, quantunque abbia dimoſtrato eſſere un Rettilineo: così il Sig. Monforte, ſenza darſi briga d' eſaminere ſe le parabole cubiche aveſſero quelle proprietà, che ſe l'aſſegnano, le ſuppoſe curve, come eſſi le vogliono; e ſi contentò di provare per il calcolo analitico, che i cubi terminano alle linee rette, ſiccome avea io dimoſtrato per la via ſintetica.

Non è poi maraviglia, che il Signor Monforte in quella dimoſtrazione ſi ſia ſervito della parabola cubica del primo genere; perchè, ſiccome io non ancora aveva in

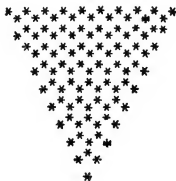
quel

quel tempo, ch'egli fece la sua lettera, nella quale approva il mio Metodo, espressamente impugnata la parabola Apolloniana, ne dimostrata l'insussistenza dell'altre curve, ma solamente aveva dimostrato, che i cubi delle applicate terminano alle linee rette: Il Sig. Monforte ancora ad altro non attese, che a confirmare col calcolo analitico la mia dimostrazione sintetica; e che ciò sia vero: Osservisi, che i Dialoghi, ne'quali hò la prima volta a dirittura impugnato la parabola Apolloniana, furono da mè pubblicati dopo che il Sig. Monforte con grave dolore di tutti i buoni amici era già morto, perchè furono da me pubblicati l'anno 1718; dunque in quel tempo, che il Sig. Monforte approvò le mie proposizioni, io non aveva ancora apertamente impugnato le curve, ma solamente aveva fatte dimostrazioni, dalle quali si poteva dedurre, che le curve non hanno le proprietà, che se le assegnano, e perciò il Signor Monforte non era tenuto di riprovare nelle sue dimostrazioni quelle curve, che tutti i signori geometri avevano abbracciate per linee geometriche.

Adunque le antecedenti, gentilissimo Sig. Marchese, son le considerazioni, che io hò fatte intorno alle parabole di grado superiore, o siano cubiche da signori moderni geometri inventate, le quali considerazioni, siccome vi hò detto nel principio di questa Lettera, erano superflue; perchè dopò che io hò dimostrato, che la parabola piana non hà le proprietà, che i signori moderni le assegnano, le cubiche, che dalla piana dipendono, non possono avere le proprietà, ch' essi le assegnano. Ma la cagione, per la quale mi sono indotto a far conoscere, che le parabole cubiche da' sign. moderni geometri pensate non hanno le proprietà, ch' essi le assegnano, è stata solamente per far chiaro, che tutte le curve da' sig. moderni pensate non hanno alcuna di quelle proprietà, ch' essi a quelle assegnano; e che ciò sia vero, è certissimo, che da quello, che io hò dimostrato intorno alle curve, se ne deduce la seguente generale proposizione cioè: *Che tutte le curve, fuorche il cerchio, non hanno le proprietà, che i signori moderni geometri le assegnano;* don-

donde ne avviene, che siano tutte chimeriche invenzioni quel gran numero di nuove curve, che i signori moderni geometri han ritrovato per lo mezzo de'loro calcoli, e delle quali si veggono pieni i libri d'alcuni signori moderni matematici.

Io son certo però, che i signori moderni geometri non gradiranno lo avere io additato loro gli errori, ne' quali sono inciampati, affaticandosi di ampliare la falsa dottrina delle curve; e quel ch'è più, d'aver io supplito a quello, che sempre si è desiderato da tutti i geometri, con avere additati i veri luoghi delle radici, de' quadrati de' cubi, e di tutte le potenze fino all'infinito: dalla qual cosa n'è avvenuto, che io abbia, per lo mezzo della geometria d'Euclide, risoluto il gran problema della Duplicazione del Cubo, come voi ben potete conoscere. Basta a me però, che le gradite Voi, e che attribuiate quelle riflessioni, che in questa Lettera si contengono, ad un animo desideroso di appagare almeno in parte quell'alto vostro genio, del quale in tutte le vostre opere vi rendete ammirabile; e pregandovi di conservarmi nella vostra grazia, divotamente vi bacio le mani.

Napoli 16. Novembre 1721.

DIA-

DIALOGHI

DI

PAOLO-MATTIA DORIA

Ne' quali, rispondendosi ad un' Articolo de' Signori Autori degl' Atti di Lipsia dell' anno 1717., s'insegna l'arte di esaminare una dimostrazione geometrica, e di dedurre dalla Geometria Sintetica la conoscenza del Vero, e del Falso: ed in conseguenza di ciò si esaminano l' Algebra, e i nuovi Metodi de' Moderni.

In questa nuova impressione dall' Autore *accresciuti di altre considerazioni, e di altre riflessioni.*

NUOVO METODO GEOMETRICO

Per trovare fra due linee rette date infinite medie continue proporzionali, &c.

i. e.

NOVA METHODUS GEOMETRICA

Pro inveniendis mediis continuo proportionalibus infinitis, inter duas rectas datas; Autore

PAULO-MATTIA DORIA.

Antverpiæ, apud Chriſtophorum Plantinum, 1715, 4
Plag. 13. cum fig.

Ui inde ab aliquo tempore inter Italiæ Geometras quoſdam turbas excitavit liber, jam ſecundum editus, & ſero tamen ad nos pervenit. Primum enim Auguſtæ apud Danielem Hopper prodiit A. 1714. alio & ordine propoſizionum, & ſtilo. Quæ enim ſuccinctæ ibi tradita erunt, ea in hac editione, quam non Antverpiæ quidem, ſed in ipſa Italia prodiiſſe perſuaſi ſumus, uberius explicantur, mutata etiam interdum propoſizionum forma, & numero corollariorum, Reliqua diverſitas omnis ſub finem præfationis ſatis prolixe ab Autore exponitur. Initium enim illius præfationis fontes errorum aperit, quos perſuaſum ipſi eſt, & omnes committere, qui novis ſe inventis opponunt, & nuper illos Mathematicos commiſiſſe, qui varias novæ huic ſolutioni problematis mediarum objecerunt. Indicat autem præcipue ſequentes, impetus phantaſiæ, animum præventum; & tumultum commotarum paſſionum. Remedium hiſce aſſignat ſtudium Geometriæ. Vitio tamen methodorum evenire, ut tam pauci fructum e Geometria, qua remedio, capiant. Nihil enim primo tam uſitatum eſſe, quam a ſolvendis problematibus abhorrere, quo fit, ut inveniendi, & inventa aliorum examinandi facultatem pauciſſimi conſequantur. Secundo complures Analyſi ſic abuti, ut Syntheticam meditationem prorſus fugientes, in calculi facilem, & expeditam praxin ſeſe præcipites dent, & malint in examinandis aliorum inventis calculo agere,

quam iis, quæ ſingulorum præconcepta præſtat meditatio. Tertio novas methodos magno numero adoptari non modo idem, quod Algebra, vitii habentes, ſed & alienas a rigore demonſtrationum, & ſola approximatione contentas. Deinde poſtquam methodum indiviſibilium ſatis laudavit, Italos reprehendit, quod Cavalerio invideant ſua, & in *aliarum nationum* methodos tam perdite ferantur. Quæ, & hic, & in ſequentibus de adverſariis præſentis inventi, deque conatibus Autoris dicuntur, ea, & in illos duriora, & de ſe ipſo magnifice magis dicta videri poſſint, quam ſcriptorem Mathematicum decet: ſed dandum aliquid rati cothurno linguæ rei potius aggredimur caput.

Tab. VI. Figura XXXIV.

Inventi ſumma hæc eſt. Deſcripta concipiatur Parabola ABD, Parametro AB, ſitque BQ = 3 AB, adeoque e Parabolæ natura QH = 2, ſi loco AB ſcribatur unitas; porro ſit QC = 5 AB, adeoque AC = 9, & ergo CD = 3. Fiat QL = 8, qui cubus eſt QH, & CF = 27, qui cubus eſt rectæ CD, & hoc modo producta parabola verſus D, quantum lubet, capiantur cubi ordinatarum intermediarum omnium in ipſis productis, & connectatur terminatio rectilinea ALF, &c. quo facto, cubos omnium ad lineas BL, LF, &c. terminari Autori perſuaſum eſt, huncque habet pro genuino cuborum loco v. prop. 5. 12.

Eodem modo conſtruendo loca quadrato-quadratorum, & reliquarum potentiarum, facile ſibi iter paratum putat, ad conſtructionem problematis generalem, quam pro unica media ſic expedit. Si inter X, & Z quæratur media unica, deſcribatur Parabola parametro X = AB, axeque producto verſus C, donec AC exceſſerit Z, conſtruatur ACI triangulum æquicrurum, unde erit, & BB = AB, & MP = MA, &c. atque adeo ad BI terminabuntur quadrata reſpondentium ordinatarum BB, MN, CD, &c. in ipſarum productionibus ſumta; uti explicatur propoſitione 2. Fiat C 10 = Z, ductiſque 10 *f* & *d f* cum AC, & CD reſpective parallelis, erit *d e* media quæſita, quæ eſt materia propos. 3. Atque hoc idem plane eſt, ac ſumere Ad = Z, erigereque *d e* neque adeo quicquam novi. At nimis nova

va sunt, quæ nunc sequuntur. Inter X, & Z desiderantur mediæ duæ, idest, habetur Z pro cubo, X pro unitate. Producatur parabola ABD cum BI, BL, EF, &c. locis potentiarum, donec cubus CF, cujusdam ex assumtis ordinatæ CD, evaserit major quam Z. Fiat CV = Z, ductisque ut ante VE, & EM; erunt MN, & MP, ut radix, & quadratum id est, lineæ quesitæ, quod quidem e figuræ inspectione satis manifestum est, modo BL, EF &c. fuerit genuinus cuborum locus; si Z fuerit minor quam QL, faciendum QX = Z, reliquis ut ante manentibus.

Porro requiruntur mediæ tres, id est, sit Z quadrato-quadratum, & X unitas, queruntur radix, quadratum, & cubus. Factis iisdem, quibus ante, sit CVH locus quadrato-quadratorum, fiatque DY = Z, & ductis YV & QV ad AD & DE parallelis, erunt quæsitæ QK, QR, QS, modo CVH verus quadratorum CG cuborum fuerit locus. Et hoc modo progrediendo in infinitum, constructio eadem infinitas medias suppeditabit, modo loca potentiarum genuina in rectilineis Autoris habeantur. Tab. VI. F. XXXV.

Et hic quidem, si quorundam talis est novitas, ut tam parum valeant ad vetera evertenda, ut tuto operoso ipsorum examine superfedere quis possit: hoc ex eorum fortasse numero est dicendum. Examen susceperunt tamen Augustinus Arianus, publicus in Regio Neapoleos studio Lector, & Nicolaus Galizia, Professor Matheseos Neapolitanus; porro Anonymus quidam, & pariter sine nomine Bartholomæus Intieri, proditus vero ab Autore p. 88. quorum omnium objectiones cum responsionibus Autoris operi subjunguntur.* Hyacinthi enim de Christophoro impugnationes ideo omissas ait, quod cum reliquis coinciderent. Omnes autem in oppugnando cuborum loco versantur. Et Augustinus quidem Arianus, Nicolausque Galizia prima objectione negant præcipuum momentum indirectæ demonstrationis allatæ pro loco cuborum ad propos. 5. Summa demonstrationis hæc est: CF, QL, BB, sunt cubi per constructionem; si ergo intermediarum ordinatarum cubi respectivi non ad BL & LF terminantur, intra vel Tab. VI. Figura XXXIV.

* In hoc libro sunt à pag. 85. usq; ad pag. 101.

vel extra cadent; quod sane certissimum est. At si extra cadere dicantur, qui inter QL & CF v. c. intersunt quum major sequens continuo fit præcedente, ob ordinatas versus CD majores; ea, quæ proxime præcedit CF, ipsam CF excedet: & eodem modo; si intus cadere dicantur regrediendo a CF ad QL, sequi putat Autor, eam, quæ proxima est ipsi QL, hac utique esse minorem. Opponentes utrumque negant instando, quæ ad KL & LF terminantur ordinatarum productiones, & extra BL, LF cadere; & eas quæ ipsius QL, CF, proximæ sunt, non facere majores ipsis QL, CF, respective, nec secundo casu ultimas earum, quæ ad LS & FO terminantur, & intra angulos CFO, QLS, cadunt, minores esse ipsis CF, QL &c. Cui addi poterat, differentias productarum ordinatarum extra vel intra BL & LF cubos terminantium, posse decrescere, neque illa incommoda sequi, nisi supponatur differentiarum æqualitas, quod idem est, ac supponere id quod probari oportebat. Secunda objectio eorundem ad incommodum ducit. Idem agit tertia Anonymi, quanquam ratione aliquantum diversa. Bartolomæus Intieri calculo generali ostendit, locum cuborum non rectam esse, sed parabolam cubicam. Quibus omnibus idem fere obtigit responsi. Nam præter distinctionem inter id, quod rectis convenit qua talibus & qua cubis, & novas satisque longas demonstrationes loci cuborum rectilinei ad I & III objectiones allatas sola excusatio restat, opponentes considerare Parabolam in alia geneseos hypothesi, quam qua utitur Autor. Qui ipso affirmat, pro generationum diversitate contrarias Parabolæ esse posse proprietates, seu potius, quod juxta unam generationem certissimum est id in incommoda ducere, si juxta aliam exigatur: quod quantum conveniat cum uniformi non extensorum tantum, sed & rei cujusvis natura alii judicaverint.

Quibus de cetero volupe fuerit ideam formare totius inventionis, & generationem Parabolæ perspicere, ad quam ubique provocat Autor: ii consilium ejus omne percipient e sequentibus, quibus innotuit nobis, per schedam

ex

ex Italia una cum libro transmissum. Deprehendit scilicet, parabolæ genesin, qualem exhibuit Galilæus, Apollonianæ multum præstare, in qua quippe unitas seu parameter non tantum per lineam, sed & per numerum exponitur, perinde ac ordinatæ integris 2,3,4, &c. designatæ, quæ ad determinata axis puncta ducuntur, & a vertice distantias habent sequentibus 1, 4, 9, 16 &c. exprimendas. Quibus quidem commodis omnino carere Autori videtur Apolloniana constructio, quæ quippe ad numeros non attendit. Existimavit igitur Autor, uti duæ mediæ quantitates in numeris ideo habentur, quod habeatur expressa numero unitas, sic ope descriptæ hac methodo parabolæ, in qua & unitas & ordinatæ linea & numero explicantur, haberi posse medias duas & infinitas. Tandem inter commoda istius geneseos haud ultimum esse invenit, quod linea numeri loco possit adhiberi, & quod ordinatæ interceptæ infinitæ haberi possint ope methodi indivisibilium, inter illas, quæ numero exponuntur. Arte rem peragit sequente. Principio in prima propositione genesin istam parabolæ docet, & interceptas inter illas ordinatas, quæ numero exprimuntur, numero explicari eadem servata parametro non posse, in prima consideratione subjuncta propositioni ostendit, quanquam mutata parametro per facile exponantur. Deinde unitate & ordinatis, quæ numero exponuntur, tanquam limitibus utitur intermediarum, eave re quadrata in numeris obtinet 1,4,9 &c. ad hypotenusam trianguli æquicruri terminata, & limites constituentia quadratorum interceptorum & irrationalium, uti e prop. secunda patet, mediamque unam his positis invenit, ut supra commemoratum est, propozitione tertia. Porro ordinatis numero sic expressis utitur ad parabolam planam inveniendam, quæ respectu ordinatæ datæ, non autem cujusvis officium cubicæ faciat, ut adeo nova parabola opus sit ad habendum cubum ordinatæ cujusvis, ut patet e propos. quarta, & ad construendos cubos 1, 8, 27, &c. qui limites sunt interceptorum, horumq; integrum locum determinandum, quod suo modo exequitur Autor

prop.

prop. quinta. Ex iisdem tandem cubis ad hypotenusam æquicruri terminatis & limitum instar assumtis infinitos ad eandem cubos terminari ostendere suscipit, quo positive demonstret prop. 12, quod in quinta negative tentaverat. Ut adeo in universum quatuor in locis propositionis primariæ demonstrationem tentaverit Autor prop. 5. 12, & cor. 2. hujus: item in responsionibus ad objectiones p. 72, 73, 74, 75.

Ceterum quæ propositionibus subjungitur epistola ad Antonium Monforte meditata quædam continet circa differentias potentiarum superiorum, at numerice, id est, particulariter expedita. Alia est sub finem operis addita epistola Antonii Monforte ad Autorem, quæ in probanda & extollenda inventione Doriana occupatur. Quæ vero ab Autore seorsim edita est epistola, scripta 11. Aprilis 1716. ad Paulum Franconem Marchionem de Salcito, id agit, ut consectaria quædam explicet, quæ e *Nova Methodo* deducuntur, circa parabolas generum superiorum. Cum enim Cl. Autori persuasum sit, potentias ordinatarum terminari ad rectas, aliter existimare non poterat, quam Parabolas altiores, quas omnes hactenus Geometræ pro curvis habuere, curvas non esse, sed particulas aut frusta hypotenusarum diversorum triangulorum rectangulorum. Uti igitur in consideratione ad prop. undecimam novæ methodi, parabolam vulgarem curvam ait esse, exinde finito rectarum numero compositam, quas rectas pro hypotenusis habet indefinitorum numero truncorum triangularium; sic prima propositione & iis quibus absolvitur epistola omnibus, altiores omnes eo modo ex hypotenusis componi satagit ostendere, quo in construendis rectilineis supra explicatis fuerat usus. Qui horum omnium accuratius examen instituent, quod nobis jam permissum non est, ii, si aliunde non innotvit ipsis deprehendent veritatem eorum quæ A. 1686. p. 298. horum Actorum leguntur, *Sed Geometria Indivisibilium Cavallerii Scientiæ renascentis non nisi infantia fuit*, multumque ex methodis *aliarum nationum* subsidii esse petendum, nisi quis velit a via aberrare.

DIA-

DIALOGO PRIMO.

INTERLOCUTORI.

Doria, e Filotimo.

Fil. NOi ſiamo a mal partito Signor Doria. Quel Metodo, che m' avete aſſerito per vero è ſtato preſo con diſprezzo da una celebre Società d'Europa.

Dor. E come! e da quale?

Fil. Dalli Signori Autori degli Atti degli Eruditi di Lipſia; vi par poco?

Dor. Mi par molto, perche coteſta Società è ſtata ſempre riputata prodiga di lode, e mai avara; anzi di ciò è ſtata ſpeſſe volte tacciata; or mentre muta il ſuo ſolito coſtume per mia cagione, qualche grande argomento la muove. Ma ditemi? Formano eglino perfetto giudicio della mia Opera? Additano in quella alcuno errore?

Fil. Non ſaprei dirlo, perche non aſſegnano errore, ma narrano la voſtra Opera con termini di poſitivo diſprezzo; ed è così confuſa la narrazione, che non ſi può intendere ſe fanno da ſemplici Relatori, o da Giudici. Il certo ſi è, che vi biſogna uſare un poco di morale, ed armarvi di pazienza.

Dor. Potete credere, che queſte coſe non mi giungono nuove; perche nella Prefazione al mio Nuovo Metodo hò narrati li penſieri del Signor Paſcale, il quale ragionando delle avverſità, che ſoffrono gl' Inventori di nuove coſe dice, che quelli ſon coſtretti ad accoſtumare il lor animo fino a vederſi trattati da viſionarj. *Tela prævisa minus feriunt.*

Fil. Non voleva dirvelo; ma giacchè vi vedo d'animo ben diſpoſto a ſofferire dico, che poco men, che da viſionario vi trattano, perche delle voſtre coſe ragionando ſempre uſano il ſeguente termine cioè, *ut illi perſuaſum*

est, quasi dir volessero, che voi solo siete persuaso, e non a ragione, delle vostre cose, ciò che con termini discreti vuol dir visionario.

Dor. Tutto ciò però gratis, e senz' assegnar ragione di quel che dicono. Non è così?

Fil. Parlano, siccome vi hò detto, confusamente, di modo che non si sà, se fanno l' officio di Relatori, o di Giudici. Se considerate il disprezzo, col quale parlano della vostra opera, sembra, che si portano da Giudici; perch' è certissimo, che una Società non può dichiarar vana una invenzione, senza prima averla esattamente, e per tutte le sue parti considerata: ma se all'incontro considerate il vario modo di ragionare sembra, che facci-no da semplici Relatori; e poi vi è un luogo, nel quale par che vi faccino una brieve opposizione: imperocche parlando dell' obbjezione prima de' vostri contrarj soggiungono. *Cui addi poterat*. In somma io non l' intendo.

Dor. Oh, questo che mi narrate dell' obbiezione, tanto più muove la mia curiosità, quanto men curo i disprezzi senza fondamento fattimi. Di grazia lasciate, ch' io vegga il libro.

Fil. Io non voleva darvelo; ma giacchè così volete, eccolo, e leggiamolo insieme, mentre per alleviarvi la fatica, hò già notati i luoghi, ne' quali vi tacciano.

Dor. Leggiamo dunque nel principio questi sì fatti luoghi.

Fil. Li Signori Autori degl' Atti degli Eruditi prima narrano la vostra prefazione, e quella narrando dicono, che avete condannato i Nuovi Metodi delle straniere Nazioni; *deindè postquam Methodum indivisibilium satis laudavit, Italos reprehendit, quod Cavalerio invideant sua, & in aliarum Nationum Methodos tàm perditè ferantur*, e terminata la narrazione della vostra prefazione, prosieguono con queste parole ingiuriose, a mio credere, al vostro costume: *Quæ, & hic, & in sequentibus de Adversarijs præsentis inventi, deque conatibus Autoris dicuntur ea, & in illos duriora, & de se ipso magnificè magis dicta videri pos-*

possint, quam Scriptorem Mathematicum decet, sed dandum aliquid rati cothurno linguæ, rei potius aggrediamur Caput.

Dor. Oh, la prima scena fa chiaramente vedere l' intrico, e il scioglimento di tutta la favola, ciò ch'è un gran difetto della Comedia.

Fil. E come?

Dor. Non vedete, che si sono adirati meco, perche pensano, ch' io abbia nella mia prefazione condannato i Metodi degli Oltramontani, lo che chiaro si scorge in quelle parole: *Deindè postquam Methodum Indivisibilium satis laudavit, Italos repræhendit*; e più ancora in quell'altre cioè; *dandum aliquid rati cothurno linguæ.* Non vi accorgete, che in queste parole parlano a guisa di offesi, li quali vogliono benignamente perdonare all' offensore?

Fil. Per Dio ch' è verissimo; ed avete ottimamente avvisato, che la prima scena mostra lo scioglimento della Comedia, perche finiscono la relazione del vostro Metodo appunto appunto mordendovi per quel che avete detto di Cavalerio; che sia così: Nel terminar la narrazione della vostra Invenzione primieramente citano quello, che han detto del Metodo di Cavalerio negli Atti del 1686., poscia concludono: *Multumq. ex Methodis aliarum Nationum subsidij esse petendum, nisi quis velit a via aberrare*; parole, che mostrano chiaramente aver essi contro di voi concepito sdegno, a cagion che avete anteposto agli altri Metodi, il Metodo di Cavalerio.

Dor. Adunque l'ira li hà mossi? Non voglio di più, l' ira è sufficiente ad oscurar l' intelletto:

Impedit ira animum ne possit cernere verum.

Fil. Ma credete voi, che l' ira possa tanto nell' animo umano, che sia valevole a far sì, che una intiera Società ponga in abbandono la considerazione della propria stima per aderire allo sdegno?

Dor. La mente umana è, come vi hò detto più volte, a guisa del Sole, la luce del quale ogni picciol vapore l' oscura, e la nebbia delle passioni è assai densa: ed oltre a ciò in un problema tanto grande, quanto è la Dupli-

cazione del Cubo, nel quale tutti son prevenuti, che non possa ritrovarsi, e quasi tutti sono offesi da invidia, si stima vana fatica il studiarlo, si ammette di leggieri ogni obbiezione, si legge solamente l'idea in generale dell'opera, nè si riguarda alla forza delle dimostrazioni, perche s' hanno certamente per false; e quando anche si conoscessero vere, se ne cela artificiosamene la conoscenza, acciò sì fatti Metodi non siano studiati da giovani, i quali poi potessero rimproverare a loro maestri la poco accortezza da essi usata, nell'aver trasandati principj così facili, come son quelli, da i quali io hò dedotta la mia novella Invenzione.

Fil. Ma voi indovinate tutto senza aver letta la loro relazione; perche appunto appunto delle vostre proposizioni altro non narrano, se non che la costruzione; ed all' incontro delle obbiezioni de' vostri Contrarj narrano ogni cosa distintamente, ciò che fà chiaramente conoscere, che veduta la supposizione, non si sono degnati di leggere le dimostrazioni.

Dor. Voi dunque scorgete sempre più le pruove della passione, che li hà mossi. Ma volete vedere sin dove giunge la passion di colui, che questa Società hà destinato per esaminare il mio Metodo? Egli non ha saputo ne pur leggere la prefazione, perche se l'avesse ben letta, avrebbe veduto, che io non lodo solamente il Metodo di Cavalerio, ma Galileo, e Cavalerio, dal primo de' quali riconosco l'origine della mia Invenzione: e poscia avrebbe veduto, che io non hò, nemen per sogno, dispreggiato i Metodi de' Signori Oltramontani. Che sia così: Leggete il paragrafo 21. alla mia prefazione, il quale incomincia, *più che l'Algebra poi*, e vedrete, che nomino ingegnosissimi i Metodi degli Oltramontani; e benche dica, *Che dalla rigorosa dimostrazione si allontanano, della semplice approssimazione contentandosi*, di ciò non credo, che possan dolersi; perche niuno de' savj, e dotti Oltramontani, che io sappia, ha preteso, che i Metodi, come son quelli degl' Infiniti Piccioli, delli Differen-

ren-

renziali ed Integrali, siano rigorosamente geometrici, come Euclide. Ignoro io forse i divini lumi di sapienza, che in tutte le scienze hanno sparsi li Francesi, gl'Inglesi, gl' Olandesi, gl' Alemani, e tante altre Nazioni? Sarei troppo sciocco se l' ignorassi; ma non perciò merito di essere di temerità imputato, se stimo la Geometria degli Antichi, e reputo ingegnosa sì, ma dannosa l' Algebra, e più di quella i nuovi Metodi. Ditemi un poco, quanti sono in Francia, quanti in Inghilterra ancora oggidì, che si fanno dalla parte degli Antichi, il nuovo modo di studiar la Geometria rifiutando? Di che si sono eglino offesi? Forse perche io ho detto, che non veggo andar di buon animo gl' Italiani alla scuola degl' Oltramontani? Ma ciò perche a me sembra, che non ne abbiano di bisogno; questa è una passione tanto naturale a tutte le Nazioni, che in tutti i secoli, una Nazione l' hà comportata nell' altra: e voler per forza tenere alla scuola una Nazione, come l' Italiana, è quello, che non solo; *Scriptorem Mathematicum non decet, sed tyrannicum sentit*. Ma passiamo di grazia agl' altri capi dove dite, che mi offendono; perche, per quanto si appartiene all' acre modo di rispondere da me usato verso li miei Oppositori, eglino non san quello, che nella Città di Napoli frà me, e quelli è accaduto, e perciò non mi curo di dar conto a loro del modo, col quale hò scritto; il farò forse in altra occasione per giustificarmi in quello, che a me più preme, ch' è la pratica del buon costume.

Fil. Ottimamente avvisate; proseguiamo dunque l' esame della loro critica. Essi, dopo narrata la prefazione, narrano la vostra ipotesi senza far nemeno parola, come vi ho detto, delle vostre dimostrazioni, e poscia danno questo nobile giudicio della vostra opera. *Et hic quidem si quorumdam talis est novitas, ut tam parum valcant ad vetera evertenda, ut tuto operoso ipsorum examine supersedere quis possit, hoc ex eorum fortasse numero est dicendum*: E bene, che dite di questo? Oh quanto goderanno i nostri nemici di Geometria non intendenti, i quali regolano i

loro

loro giudicj dall' altrui autorità.

Dor. Questo sì fatto giudicio è così falso in se medesimo, che si manifesta anche agl' occhi de' non intendenti di Geometria, e muove a riso gl' intendenti di quella.

Fil. Perdonatemi: Li non intendenti di Geometria danno fede alle relazioni de' professori; e quando sentono una Società come Lipsia parlar di questo modo, giudicano contro di voi.

Dor. Giudicano contro di me quelli, che non han nè meno il naturale discorso: e volete, che ve 'l faccia vedere con una dimostrazione niente men forte, che le geometriche?

Fil. Di grazia.

Dor. Credo che ben sappiate, ch' il destino delle cose nuove è, che nel principio non siano intese, ne da veruno ricevute. Di ciò ne fan fede i molti travagli, ch' han sofferti Copernico, Galileo Galilei, e tant' altri, che troppo lungo sarebbe narrargli. Ora se avviene, ch' una invenzione nuova, e tanto importante, quanto è la Duplicazione del Cubo, sia approvata da un matematico celebre, e da tutti riputato per tale; certamente dee credersi, che questa Invenzione sia vera: Imperciocche non vi ha dubbio, che nelle nuove invenzioni, merita più fede uno, che approva, che mille, che impugnano; perche quello che approva, purche sia sufficiente, non è d' invidia, non d' ira, non di prevenzion di mente, nè d' altra passione sospetto: In vece che gli Oppositori son sempre sospetti d'insufficienza ad intendere, d'ira, d' invidia, e d' altre sì fatte ree passioni. Il mio Metodo l' ave approvato il fu Sig. Monforte, huomo della di cui sufficienza non potea dubitarsi; perchè, oltre la fama di matematico, che avea per tutta l' Europa, lo stesso celebre Signor Leibenitz l' hà lodato in molte sue lettere, quanto egli meritava; ciocche si vedrà di breve in un' Opera postuma, che di lui si dà alla luce. Ma ditemi un poco; questo argomento non è bastante a persuadere a quelli, che non sono intesi di Geometria, che

che la mia Invenzione sia vera? Certo si è, che per saper questo, altro non si richiede, se non che riflettere, che li dotti, e li virtuosi sempre sono stati nel Mondo minori in numero, che gl' ignoranti, e li maliziosi: e poi, se li non intendenti di Geometria non vogliono credere, che la mia Invenzione sia vera, questo argomento vale almeno a provare, che non sia affatto vana, come la dipingono li Signori Autori: ma acciò vediate, che li Signori Autori medesimi non mi stimano capace di dare alla luce una positiva sciocchezza, osservate, ch' essi stessi negli Atti del 1716, riferendo la mia Vita Civile, nella quale non han creduto, ch' io impugnassi i Metodi de' Signori Oltramontani dicono: *Debemus, & eidem ingeniosissimo Autori, qui Neapoli ingenii, & Mathematum scientia clarus agit librum alium vernaculum, riflessioni intorno alla meccanica de' corpi insensibili*: e del mio Metodo ragionando dicono; *nec ita pridem ab amico accepimus nobilissimum Problema, de inveniendis duabus, & infinitis mediis proportionalibus inter duas datas, solvisse*. Ora da questo certamente ne risulta un forte argomento contro di essi: Imperocchè se mi credevano nel 1716. huomo, che *in Mathematicis disciplinis clarus agit*, come poi nel 1717. mi credono huomo incapace d' intendere un errore in Geometria, quando mi viene additato; la qual cosa è tanto facile, come intendere, che due, e trè non fan sette. Questa è una gran contradizione, nella quale inciampano i Signori Autori, ed è tale, che può anche persuadere agli non intendenti di Geometria, che il mio Metodo sia vero.

Fil. E' certissimo: ed io credo, che questa sia una Università incauta, e parziale; e volete vederne un'altra pruova? Osservate, che con fina arte rapportano quattro sole parole della lettera del Signor Monforte, nella quale egli approva la vostra opera; *Alia est*, dicono essi, *sub finem operis addita Epistola Antonii Monforte ad Autorem, quæ in probanda, & extollenda inventione Doriana occupatur*; e poscia, della seconda obbiezione del Sig. Ariani ragionando,

do, dicono: *Secunda objectio eorumdem ad incommodum ducit*; senza niente accennar la risposta, che voi ci fate, e quella che ci fà il Signor Monforte, nelle quali, siccome voi mi avete detto, amendue fate conoscere, che non si è bene opposto al vostro Metodo.

Dor. Vedete dunque, che l' ira, e la parzialità de' Signori Autori è manifesta.

Fil. Ma sapete che diranno a questo vostro argomento?

Dor. Che cosa?

Fil. Diranno, che il Monforte vi hà lusingato, siccome hà detto l' Ariani nella sua lettera intitolata: *Osservazioni su di una lettera del Sig. Antonio Monforte scritta al Sig. D. Paolo-Mattia Doria*.

Dor. A questo hà risposto sufficientemente il Bonelli; e poscia voi ben vedete, che li Sig. Giornalisti di Venezia, i quali han fatto della mia Opera al tomo 18, ed al tomo 24 una vantaggiosa relazione; nel tomo poi, che siegue, scandalizati di quella sì fatta lettera dell'Ariani, dicono; *il Sig. Monforte l'approva*: e li stessi Signori Autori di Lipsia, quantunque sdegnati contro di me, sapendo quanta forza debba fare a tutti gli huomini di giusto senno la lettera del Signor Monforte, la passano sotto silenzio bensì, ma non osano asserire, ch' egli mi hà lusingato; perche ben sanno, che questa proposizione è troppo ingiuriosa a tutto il ceto degli huomini di lettere; non essendosi mai veduto nel Mondo un letterato, che, a solo fine di compiacere ad un altro, approvi affirmativamente con sua vergogna una cosa, che conosce falsa in Geometria: questo lo fanno i semplici Relatori, ma non gli Autori in Matematica, come il Sig. Monforte, il quale ha dato saggi di curar la sua fama.

Fil. Certamente. Ma per quel che io veggo, parlandosi di Giornalisti, voi avete per parte vostra i Signori Giornalisti di Venezia, quelli hanno li Autori di Lipsia, potete contentarvi; perche li Signori Giornalisti di Venezia non son meno di chi che sia, se però non s' avverasse frà gl' Italiani il detto di Tacito, che *Major ex longiquo reverentia*.

Dor. Ne

Dor. Nè meno han per essi gli Autori di Lipsia; e per farvi chiaramente conoscer ciò, vediamo se han detto qualche cosa di positivo contro le mie dimostrazioni; perche delle assertive non si deve da' geometri tener conto.

Fil. Voi burlate. Il giudicio che fanno, dopo narrata l'idea della vostra Invenzione, cioè: *Et hic quidem si quorumdam &c.* pare una decisiva disapprovazione del vostro Metodo.

Dor. E' verissimo; ma in quello asseriscono senza provare, e le satire mai sono state riputate dimostrazioni Filotimo.

Fil. E poi, quando narrano le obbiezioni de' vostri Contrarj, sembra, che parlino positivamente a favore di quelli, ed ecco le loro parole: *Summa demonstrationis hæc est CF, QL, BB sunt cubi per constructionem; si ergò intermediarum ordinatarum cubi respectivi non ad BL, & LF terminentur, intra vel extrà cadent, quod sanè certissimum est*, quel *certissimum est* è affirmativo.

Tav. VI. Figura XXXIV.

Dor. Volete che ve 'l dica; mi pare, ch' abbiamo voluto burlare; perche appunto quelche io hò dimostrato altro non è, se non che li cubi delle ordinate terminare alle due linee *BL, & LF*. Li miei Oppositori poi dicono, che se non terminano alle due linee *BL, & LF*, termineranno dentro, o fuori delle medesime, e li Signori Autori dicono, *quod sanè certissimum est*: per Dio ch' han discoperta una gran verità, dicono, che se non è diritta, è torta; ma bisogna prima dimostrare, che non sia diritta, come io hò dimostrato che lo è, ed allora si potrà dire, ch' è torta.

Fil. Voi scherzate; ma andiamo un poco al sodo, perche quì non concludono ancora.

Dor. E ditemi dove concludono, perche se li Signori Autori dimostrassero essere qualche errore nelle mie dimostrazioni, io mi dolerei bensì con essi della poca cortesia, che avrebbero meco usata la mia opera narrando, ma li ringraziarei dell' avvertimento, e mi ritrattarei; perche alla perfine io amo più del nome di

sapiente; quello di sincero; e poi qual gloria io potrei sperare di trarre dal sostenere un errore? nè per l'altre opere da me fatte, io hò dato saggio di così poca mente, che non vaglia ad intendere un errore in Geometria additatomi; quando, come hò già detto, questo è così facile, come intendere, che due, e trè non fan sette: per le quali cose ogn'uno può persuadersi, che sarò valevole ad intendere il mio errore, se me l'additeranno, e che lo confessarò ingenuamente; perche non sarebbe mia vergogna non aver io duplicato il Cubo. Giuseppe Scaligero non si recò a vergogna il ritrattarsi dopo aver pubblicata una quadratura di cerchio; ed io, ad esempio di quel gran huomo, potrei ritrattarmi ancora. Veggiamo dunque dove additano il mio errore.

Fil. Additar l'errore! Non l'additano certamente, ma sembra, che approvino le obbiezioni de' vostri Contrarj; mentre, poco dopo terminata la narrazione della prima opposizione de' vostri Contrarj, aggiungono questo cioè: *Cui addi poterat differentias productarum ordinatarum extrà, vel intra BL, & LF, Cubos terminantium posse decrescere, nequè illa incommoda sequi, nisi supponatur differentiarum æqualitas, quod idem est, ac supponere id, quod probari oportebat*: queste sono le loro parole. Ora a dirvi il vero, quando in Geometria uno non solo non impugna la dimostrazione di un altro, anzi vi aggiunge, sembra, che intrinsecamento l'approvi; essi non impugnano le opposizioni de' vostri Contrarj, anzi vi aggiungono, dunque le approvano.

Dor. Questo che aggiungono li Signori Autori degl'Atti non è contro di me: e perchè voi non ignorate la Geometria, ve lo farò intendere in poche parole. Li Signori Autori dicono, che li miei Oppositori potevano aggiungere, che le ordinate, o siano le applicate prodotte, potevano esser sempre una minore dell'altra; e notate, che dicono; *quando però non si supponghino le differenze de' Cubi essere uguali; la qual cosa sarebbe dare per dimostrato quello, che si suppone*. Considerate ora Filotimo, che con que-

questo non dicono, che le differenze de' cubi non possono essere uguali, ma che ciò si deve dimostrare; dunque non mi accusano d'aver supposto una cosa falsa; ma bensì d'aver supposto una cosa, che si dovea dimostrare. Ma volete vedere, che di ciò mi accusano a torto; leggete la decima proposizione al mio Nuovo Metodo, e vedrete, che in quella io dimostro, che i cubi sono in proporzione aritmetica; dunque, se avessero letta la mia opera, avrebbero veduto, che questo io l'hò già dimostrato: e quando hò dimostrato, che tutti li cubi intercetti fra 1, e 8, terminano in una linea retta, la quale è un pezzo d'ipotenusa, e che perciò sono in proporzione aritmetica, hò dimostrato, che le differenze frà i cubi, quando questi si suppongono infiniti, sono uguali, nè credeva io che fossi obbligato a dire, che i cubi si eccedono con uguale eccesso; perche questo non s'insegna ad altri, se non a coloro, i quali non sanno, che le quantità, che sono in proporzione aritmetica, s'eccedono con ugüali differenze; dunque con quel, *Cui addi poterat*, i Signori Autori non approvano positivamente le obbiezioni de' miei Contrarj, ma mi domandano solamente la dimostrazione d'una cosa, che non s'erano avveduti, ch'io l'avea già dimostrata. Allora si potrebbe dire, aver essi approvate le opposizioni de' miei Contrarj, quando, dopo aver narrate le opposizioni di quelli, avessero detto quel, *Quod sanè certissimum est*, ch'hanno aggiunto alla supposizione di quelli.

Fil. Ora dite ciò che vi pare, perche a me sembra, che chi aggiunge all'altrui opposizione, senza niente additar contro di quella, approvi quanto in quella si contiene.

Dor. Voi dunque volete, che gli Autori degli Atti abbiano in tutti i modi approvate le obbiezioni de' miei Contrarj? Porgetemi la di loro relazione, e lasciate, ch'io legga un poco se in appresso sono uniformi ne' loro discorsi, perche fino adesso certamente non lo sono stati.

Fil. Eccola; leggetela, di grazia, tutta, acciò dal complesso

di tutte le cose vediate meglio; e leggete appresso ancora dove rapportano le obbiezioni del Signor Intieri. *Idem agit &c.*, e vedrete, che vi tacciano ancora.

Dor. Tacete di grazia, lasciatemi leggere.

Fil. Vedere dico, che vi tacciano d' aver risposto con dimostrazioni troppo lunghe. *Novas, satisque longas demonstrationes., &c.*

Dor. Lodato sia il Cielo, Filotimo; ecco che li Signori Autori non disapprovano il mio Metodo, ed in conseguenza di ciò non approvano le opposizioni de' miei Contrarj.

Fil. E come?

Dor. Eccolo. Osservate di grazia, che dopo aver essi narrate tutte le obbjezioni de' miei Contrarj, dicono: *Quibus omnibus idem ferè obtigit responsi. Nam præter distinctionem inter id, quod rectis convenit qua talibus, & qua cubis, & novas, satisque longas demonstrationes., loci cuborum rectilinei ad 1, & 111 obiectiones allatas, sola excusatio restat, opponentes considerare Parabolam in alia geneseos hypothesi, quam qua utitur Author. Qui ipso affirmat pro generationum diversitate contrarias Parabulæ esse posse proprietates, seu potius, quod iuxta unam generationem certissimum est id in incommoda ducere, si iuxta aliam exigatur, quod quantum conveniat cum uniformi non extensorum tantum, sed & rei cuiusvis natura; alij indicaverint*; Con queste parole, Filotimo, dicono, che contra tutte le obbjezioni a me fatte, mi rimane solamente per scusa il poter dire, che li miei Oppositori non han seguita la mia ipotesi: *Sola excusatio restat*; E di ciò se ne rimettono al giudicio degl' altri. *Alij judicaverint*. Non è così?

Fil. Certamente.

Dor. E sapete quanto importano queste parole? Importan tanto, quanto dire, che mentre li miei Oppositori non han ragionato sù la mia ipotesi, han parlato al vento, e non contro di me. Con questo distruggono tutto ciò, che in tutta l' antecedente narrazione artificiosamen-

mente hanno asserito per far sì, che i sciocchi nel leggerla formassero mala Idea della mia Opera; volete vedere, che sia così? Voi ben sapete, che in Geometria la verità è una, e che la dimostrazione geometrica non lascia dubbio, e perciò non lascia scusa: dalle quali cose n' avviene, che se l' oppositore non si è bene opposto, rimanga senza taccia la proposizione dell' Autore: e se li Signori Autori rimettono al giudicio degli altri il vedere, se li miei oppositori han seguito, o nò la mia Ipotesi, certamente non han giudicato, e tutte quelle prime loro assertive sono tumultuarie, e senza giudicio fatte. Sapete che cosa vuol dire in Matematica, non seguire l' ipotesi dell' Autore? Questo è giusto come se ad un Pilota, il quale asserisse di aver trovato un nuovo cammino per andare al Giappone, passando per il Settentrione, un altro scioccamente li rispondesse, questo non potere accadere, perche quando io vado al Giappone costeggio l' Africa, e passo per il Capo di Buonasperanza: certamente il Pilota primo, ed inventore li risponderebbe sdegnato; dovete considerare il nuovo cammino da me ritrovato, e non dirmi, ch' è impossibile, perche non è lo stesso, che quello, che voi fate. Ora vedere bene, gentilissimo Filorimo, che del valore delle ragioni del Pilota oppositore son le opposizioni de' miei Contrarj; e li Signori Autori dicono; *sola excusatio restat*. Questa picciola scusa è il fondamento di tutta la mia Invenzione; perche la mia Invenzione da altro non dipende, che dalla nuova forma di costruire; e l' equivoco, che prendono li miei Contrarj non dipende da altro, che dal non avere essi intesa, ne seguita la mia ipotesi: e vedete di più, che non solo io sono il Pilota, che hà ritrovato il nuovo, ed incognito cammino, ma son quello, che mostro a i signori moderni geometri, che la terra, che pensavano aver scoverta, non è quella, ch' essi credono: perche le curve d'Apollonio, che hanno ricevute per il vero luogo delle radici delle ascisse non hanno le proprietà, ch' essi le assegnano: ond' è ch' essi

essi li miei Oppositori son quelli, che mi vogliono strascinar per forza per la via antica senza esaminare l'utile della nuova da me ritrovata. Per Dio, Filotimo, li Signori Autori a questa scusa doveano dire. *Magna excusatio restat, non sola*: e se essi credono picciola scusa il non seguire, opponendo, l'altrui ipotesi, han poca idea della dimostrazione geometrica. Per Dio, se questo è, si è ridotta la Geometria al Scetticismo; ed oh quanto goderebbe Sesto Empirico se fosse fra viventi, vedendo ne i modi deformi, cò i quali vien trattata la Geometria, diroccati i fondamenti del vero, ed avvalorato da' matematici delle più celebri Università, il suo male inteso Scetticismo. Vedete dunque, che li Signori Autori di Lipsia dispregiano tumultuariamente il mio Metodo, ma non decidono intorno a quello veruna cosa: anzi di più osservate quì appresso, che si dichiarano espressamente di non averlo ben studiato; perche dopo narrata di nuovo l'idea della mia Invenzione di un modo, che sembra, che dopo averla dispregiata vogliano pur soddisfare a quelli, nella mente de' quali tanto potesse la curiosità, che, malgrado cio ch'essi ne han detto, volessero pur studiarla. *Quibus de cætero volupe fuerit ideam formare totius inventionis*: Si protestano di non averla accuratamente studiata; lo che chiaro si scorge da quel che aggiungono: *Qui horum omnium accuratius examen instituent, quod nobis jam permissum non est*: ed ecco, siccome vi hò detto, che chiaramente si dichiarano di non aver esaminato il mio Metodo. Ma di grazia vi pare, che si possa dar giudicio in materie geometriche, senza prima accuratamente esaminarle? Nò, nò; i Signori Autori han solamente fatta del mio Metodo una relazione tumultuaria, dettata dallo sdegno, o suggerita dalla parzialità, ma non han fatto giudicio, gentilissimo Filotimo.

Fil. Ma Dio buono, se non han fatto giudicio, perche proferire incautamente quelle parole, che a prima vista sembrano decisive? *Et hic quidem si quorumdam talis est novitas, ut tam parum valeant ad vetera evertenda, &c.*

Que-

Questi sì fatti giudicj in cose tanto nuove, quanto son le vostre, farli senza un profondo, e perfetto esame, certamente; *Scriptorem Mathematicum non decet*.

Dor. Questo è il modo, col quale oggi vien trattata la Geometria, Filotimo mio: ma fingiate di grazia, un huomo di giusto senno, il quale volesse formar giudicio del mio nuovo Metodo dalla relazione de' Signori Autori: qual giudicio potrebbe egli fare doppo aver letta la di loro relazione? Certamente giudicarebbe, che detto Metodo vien vilipeso dalli Signori Autori degli Atti con una sentenza *gratis facta*, ma che sin ora rimane illeso da qualsivoglia taccia d' errore; imperciocche essi non decidono intorno all' importante punto cioè, se li miei Oppositori abbiano seguito, o nò la mia ipotesi, ciò che rende vane tutte le opposizioni da quelli fatte, ne mostrano alcun errore nelle mie proposizioni; dunque quello. *Et hic quidem si quorundam talis est novitas, &c.* con quel che siegue, è una temeraria assertiva, e le mie proposizioni rimangono sempre illese da taccia d' errore. Vi par egli, che chì ragiona in questa guisa possa dirsi geometra? Ma volete vedere, che in tutti i luoghi della loro relazione asseriscono sempre, senza mai impegnarsi a tacciar me d' errore: osservate la narrazione che fanno della Lettera da me indrizzata al Sig. Marchese di Salcito mio grande Amico, e vedrete, che in quella dicono. *Quæ verò ab Autore seorsim edita est Epistola scripta &c.* Or dovete sapere, che in quella Lettera io dimostro, che il Rettilineo della V. proposizione al mio Nuovo Metodo, ha le stesse proprietà, che i moderni geometri male a proposito assegnano alla parabola cubica del secondo genere; e li Signori Autori se la passano artificiosamente dicendo: *Cum enim Clar. Auctori persuasum sit potentias ordinatarum terminari ad rectas, aliter existimare non poterat*: da queste parole si deduce, che sono stati cotanto arditi, che han dichiarato il mio Metodo indegno di esser letto, e considerato; potevano bene usar la carità con dirmi liberamente, se a ragione,

o a

o a torto son io persuaso, che le potenze dell' ordinate terminano alle rette. Ma qual maraviglia è mai, o Filotimo, che li Signori Autori non abbiano studiato il mio Metodo, quando nè meno hanno inteso quello, che la semplice narrazione riguarda: volete vedere ch'è così? Li Signori Autori annoverano tra miei Oppositori dichiarati il Signor Giacinto di Cristofaro, quando io non l' hò riferito al mio Metodo, che per mio oppositore incerto, e per altrui relazione. Dicono essi di quello ragionando: *Hyacinti enim de Christophoro impugnationes ideò omissas ait, quod cum reliquis coinciderent*: ed io a carte 91. del mio Metodo dichiaro espressamente di non aver potuto avere da quello medesimo le sue obbiezioni. Per Dio, che in questo fatto, Filotimo, sembra, che li Signori Autori di Lipsia siano d' intelligenza co i miei Contrarj; o che qualch'uno di quelli abbia usato con essi Signori Autori di Lipsia l' istessa malizia, che usò con li Signori Giornalisti d' Italia: Perche dovete sapere, come per lo mezzo d' una falsa relazione, che quel tale fece pervenire alli Signori Giornalisti d' Italia, fece sì che nel tomo 25. de' loro Giornali riferissero, che il Signor Giacinto avea pubblicata una lunga scrittura contro il mio Metodo; ma il Signor Giacinto ciò saputo mi scrisse un biglietto, nel quale mi attestò di non aver mai sì fatta scrittura pubblicata, e li Signori Giornalisti di Venezia poi, avendo avuto notizia dell' equivoco, che avevano preso, sinceramente nel tomo 26. de' loro Giornali si ritrattarono, dolendosi, da quei sinceri huomini che sono, della trama, che dal falso relatore l' era stata fatta; or che vi pare Filotimo?

Fil. Mi pare, che alcuno de' vostri Oppositori vada, come si suole volgarmente dire, facendo popolo contro di voi, e forse questo hà risvegliato i Signori ....

Dor, Nò, nò Filotimo; io son certo, che li miei Oppositori tutte quelle sì fatte maliziose, e tumultuarie relazioni di Lipsia nell' intimo del lor cuore non approvano: Ma lasciamo di più far menzione di sì fatta relazione,

ne, e considerate gentilissimo mio Filotimo, quanto nociva sia la malizia a' maliziosi medesimi. Li Signori Autori han creduto con sì fatti disprezzi di sepelire il mio Nuovo Metodo; ed io all'incontro credo, che, mercè le infinite contradizioni, nelle quali sono inciampati, e gl'infiniti errori, che han fatto nel riferirlo, ogn' huomo di giusta mente debba dedurre conseguenze a favor della verità del mio Metodo: perche alla perfine credete voi Filotimo, che verun huomo di giusto senno, ancorche di Geometria non inteso, possa dar fede ad una relazione, nella quale su'l principio li Signori Autori condannano con termini assoluti la mia Invenzione; di poi si ritrattano, e dicono, che a me rimane scusa di poter dire, che li miei Oppositori han ragionato di una cosa tutta dalla mia diversa, perche non han seguito la mia ipotesi; ed in appresso concludono, ch' essi non lo hanno esattamente studiato? Per Dio, basta sapere, che in Geometria la verità sia una, per conoscere sì mostruose contradizioni; basta vedere l'odio, che questa Università ha mostrato verso di me per conoscere, che se avessero potuto approvare le obbjezioni de' miei Contrarj, non avrebbero detto. *Excusatio restat*; ma con termini decisivi averebbero pronunciata la sentenza, dicendo. *Obiectiones esse veras, & ideò falsas Auctoris propositiones*. Ma sapete, o Filotimo, qual è il frutto, che da sì mostruoso modo di ragionare di una intiera Società noi dobbiamo trarre?

Fil. Quale?

Dor. Quello di salvar la nostra mente dal quasi comune naufragio: e come che vero sia, che la Matematica sola sia la vera disciplina della mente umana, e sola sia valevole ad ordinare il nostro discorso, voglio nel seguente ragionamento, che fra noi terremo, insegnarvi a dedurre dalla Matematica il grand'utile di distinguere con sicurezza il vero dal falzo; e distinguere altresì quelli oggetti, ne' quali la nostra mente possa questo vero ritrovare, da quelli, ne' quali è costretta a contentarsi del solo

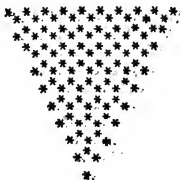
probabile; e voglio in questa guisa rendervi sufficiente, ad intendere questo mio Nuovo Metodo, che la mente di tanti professori in Geometria ave adombrato.

Fil. Io credeva di esser capace d'intenderlo, mentre ho, come gli altri, la Geometria studiato.

Dor. Nò Filotimo. Vedrete con esperienza, che se l'avete studiata, come la studiano la più gran parte de i Signori Moderni, non siete abile a distinguere il vero dal falso.

Fil. Voi riempite il mio animo di curiosità, perche fate, ch' io stesso diffidi di quello, che fin ora ho studiato.

Dor. Se nel seguente ragionamento starete attento a miei discorsi, lo vedrete.

DIA-

DIALOGO II.

Nel quale l'Autore dimostra a Filotimo, quanto utile, e naturale sia il Metodo sintetico, e i danni, che l'Algebra speciosa, e l'uso del Calcolo analitico producono; e come sian falsi, e dannosi tutti i nuovi Metodi, fuorchè quello di Buonaventura Cavalerio.

Dor. ECco, Filotimo, ch' ora mai siam gionti al cimento, nel quale voi dovete mostrarmi qual sia l'idea, che avete formata dello studio della Geometria, e se avete dallo studio di quella dedotta un' idea generale del vero, e del falso.

Fil. Io ho ben intese le proposizioni, che mi sono state spiegate, perche son rimasto convinto dalla dimostrazione di quelle sì fatte proposizioni; dunque ho avuto la sufficienza d' intendere: l'idea poi del vero in genere a me sembra, che sia l'istessa, che l'idea della dimostrazione.

Dor. Oh. Voi siete molto lungi dal fine, al quale dovete aspirare; questa parola intendere è generale, e perciò poco men che tutti s' ingannano, credendo d'aver già penetrato nel fondo delle cose, quando son rimasti nella sola superficie di quelle. Il vero intendere è quello, quando voi intendete una cosa in guisa, che ne formate di quella un'idea così chiara, come voi stesso foste di quella tal cosa l' Inventore; nè questo si fà col sentir solamente spiegar dal Maestro le proposizioni d'Euclide, perch'essendo naturale all' huomo il desiderio di ricorrere sempre al piu facile, il difficile abborrendo; quindi è, che la mente quelle sì fatte spiegazioni ama più d'albergarle nella memoria, che di farle sue proprie per lo mezzo di una seria, profonda, e penosa ris-

Dor. Avete niente studiato il calcolo analitico, e gl' infiniti piccioli, li differenziali e gl'integrali?

Fil. Ancora un poco, ma non mi sono molto in quelli colla mente profondato.

Dor. Se non avete fatte sopra la Geometria quelle meditazioni, che vi hò poc' anzi solamente accennate, farete geometra d' erudizione Filotimo, ma non già vero geometra; e mi contenterei, che invece d'aver studiate tutte queste cose, che avete dette, avesse studiati solamente gli elementi, ma nel modo, come io intendo, che si debbano studiare: i calcoli poi mi rallegro, che non li abbiate molto coltivati, perche sareste divenuto, come la maggior parte degli altri, un semplice pratico calculatore senza discorso.

Fil. Ah. Voi tornate ad inciampare nell' indignazione di tutti i Matematici, appunto come vi è avvenuto a cagione di quella vostra maledetta prefazione al nuovo Metodo, la quale hà mossi a sdegno, come sapete, li Sig. Autori degli Atti degli Eruditi di Lipsia.

Dor. Io hò ricavato Filotimo, dallo studio della Geometria, e da quello della Filosofia, quell' amore verso il vero, ch' è possente a farmi obbliare ogni basso, e vile riguardo; e perciò essendo io a buona ragione convinto, che l' Algebra sia a quell' umano raziocinio, che dalla Geometria si deve ricavare, perniciosissima; e che i nuovi Metodi da moderni inventati, come son quelli de' differenziali, ed integrali, e quelli degl' infiniti piccioli, ed altri, siano non solo perniciosi, ma falsi: Indegna cosa d' huomo sincero reputo essere il celare al Mondo, per timore, la conoscenza del danno, che arrecano si fatti perniciosi metodi.

Fil. Dura impresa intraprendete Signor Doria. L'Algebra è da tutti appellata divina, come quella, che discopre alla nostra mente, per una via facilissima, e a tutti uguale, nobilissime verità. I nuovi Metodi poi, che avete accennati, son da tutti seguiti, come quelli, i quali portano ancora più oltre, che l' Algebra, la potenza della Geometria.

Dor. Il

Dor. Il facile alletta tutti: ma conturtociò la Sapienza è una madre, che non si discopre se non a chì con ordinata si, ma insieme penosa fatica la ricerca.

Virtutem posuere Dij sudore parandam,

disse Esiodo, e la virtù dalla difficile sapienza dipende. Noi non possiamo mutar le leggi della natura Filotimo; ond'è meglior consiglio seguirle, che tentar di mutarle: ed invero la natura hà così inviluppata ne' senzi la nostra anima, che senza un lungo, e ben ordinato raziocinio ella non può sprigionarsi da quell'errore, che il corpo, che la veste, e l'immensa diversità delle sensibili cose a lei cagiona; e quindi è, che non di calcoli, ma di quell' ordinato, e naturale raziocinio sintetico, che Iddio ha posto nella nostra mente, ella abbia bisogno per formare a se stessa quella ragione, per mezzo della quale ella è valevole a resistere all'errore, nel quale di legieri inciampa ad ogni momento.

Fil. Ma gli Algebristi anch' essi pretendono di coltivar la ragione; pretendono, che il raziocinio analitico sia legitimo al par del sintetico, e che il calcolo analitico agevoli bensì le dimostrazioni, e la soluzion de' problemi, ma che non guasta la ragione, anzi che disciplina la mente, ed accresca la ragione.

Dor. Non è questo il tempo, Filotimo, nel quale io possa con evidenti ragioni mostrarvi, che il raziocinio analitico non è all'ordine di quel discorso, che la natura ha posto in noi, come il sintetico conforme; e che il calcolo analitico, come quello, che accostuma la mente alla pratica, impedisce a quella il formar l'abito a ben ragionare; perche, per ciò dimostrarvi è necessario, che prima io vi faccia conoscere quanto sia all'ordine della natura conforme il raziocinio sintetico, acciò poi, paragonando l'un coll'altro, possiate bene intendere, quanto dal naturale ordine di ragionare l'analitico si dilunghi, e quanto pernicioso sia il calcolo degli Algebristi, da Settatori de' moderni Metodi usato.

Fil. Ma se il pratico calcolo dagli Algebristi usato nasce

in

in conseguenza di un legitimo raziocinio, dond'avvien' egli, che il pratico calcolo usandosi, non possa formarsi la mente a ben ragionare?

Dor. Mi avvalerò per ora della similitudine di una cosa da tutti praticata, per farvi sensibilmente intendere, come il calcolo analitico distorni la mente dal raziocinio. Ditemi un poco, Filotimo, voi usate il cocchio per camminare?

Fil. Certamente.

Dor. Ma ditemi; vi conoscete voi valevole a fare, al par d'ogn'altro huomo, il quale non abbia mai usato il cocchio, il cammino di una intiera giornata.

Fil. Certo che nò.

Dor. E questo donde avvien' egli? Certamente non da altro, se non che, non avendo voi mai fatto abito a camminare per una intiera giornata colle vostre gambe, avete perduta quella forza, e quella virtù, che la natura ha data a voi egualmente, che ad ogni rustico. Così avviene a'calculatori analitici, perdono essi, abbandonandosi al pratico calcolo, quella virtù di raziocinare, che la natura loro ave apprestata nel Metodo sintetico; ma vi hò detto, Filotimo, che non è questo il tempo di mostrarvi dall'intime cagioni la verità di questo, che ora vi hò fatto vedere solamente in immagine.

Fil. Bellissima è la similitudine, però mi riserbo a contemplar meglio, nelle intime cagioni, il vero di quello, che in essa avete preteso mostrarmi. In tanto additatemi qual sia questo gran utile, che dalla Geometria sintetica, si ricava.

Dor. Il primo, e principal utile, che a noi appresta la Geometria, è quello, di far fare alla mente umana un' idea generale del vero, e del falso, per modo che, a qualunque particolare ella si rivolga, veda la verità, che in quel particolare si contiene, o la verità della quale manca.

Fil. E come si pervien egli a questo utilissimo fine?

Dor. Astraendo il vostro discorso dall'oggetto medesimo della Geometria, ch'è la quantità, e contemplando in astrat-

astratto il geometrico raziocinio, che sù della quantità avete fatto. Questa, Filotimo, è, come prima vi hò detto, l' arte di risvegliare, per lo mezzo delle reminiscenze, le vostre idee, e combinandole avvalorare il discorso. In fine bisogna meditare sopra la cagione, per la quale siete rimasto delle dimostrazioni geometriche convinto.

Fil. Confesso il vero, che la Geometria studiando, mi son sentito bensì convincere dalle dimostrazioni, ma questa meditazione, che voi dite intorno alla cagione, per la quale son rimasto convinto, non l' hò mai fatta, ne credo ch'altri la faccino.

Dor. E questa è la cagione, per la quale voi non avete fatto idea del vero in genere, e per la quale pochi son quelli, che la faccino, e perciò non siete valevole a conoscer la verità, o l' errore in qualunque cosa, che alla vostra mente s' appresenta; in prova di ciò voi conoscerete solamente la verità in quelle cose, che hanno per oggetto quelle materie, alle quali la vostra mente è accostumata a pensare, ma non sì tosto vi s' appresentarà una nuova materia, che rimarrete confuso, e perderete l' uso di tutto quel raziocinio, che avete sopra particolari materie fatto a forza d' abito di raziocinare sopra quelle. Chi non medita, Filotimo, sopra il discorso, non acquista l' idea del vero in genere, ma acquista solamente un semplice abito di raziocinio, il quale quando si dilunga da quelle materie, alle quali è abituato, si perde; e questa è la cagione, per la quale questi sì fatti geometri abituati, e non mentali, che così voglio nomarli, quando vogliono esaminare le altrui nuove Invenzioni naufragano, per così dire, in un picciolissimo lago, e prendono di quelli abbagli, che quando poi conoscono la verità, si vergognano de' grossolani errori, che han presi.

Fil. Mi sembra, che voi da buon Metafisico facciate l'anotomia alla mente de' Matematici. Ma di grazia ditemi un poco, qual' è questa idea generale, che voi del vero, e del falso avete fatto? *Dor.* Io

Dor. Io sopra il raziocinio geometrico meditando, hò conosciuto, che l'essenza del vero in generale consiste nell' unità, per modo che, vero è solo quello, che è uno, e tutto ciò, che da diverse cause dipende, noi non possiamo mai esser certi che sia vero in se, quantunque possa forse esser vero in riguardo de'nostri sensi, ovvero in quanto a i modi del nostro pensare. Alla perfine Filotimo, in quella guisa che Iddio, il quale solo è l' unico vero, è uno; così la nostra mente a sua immagine, e similitudine da lui creata, non può ritrovare il vero in altro, che nell' uno.

Fil. Ma ditemi un poco, se questo è, la Geometria non è vera? perche l' oggetto della Geometria è la quantità, la quantità si compone d' infinite forme diverse, dunque la Geometria manca di oggetto, e la mente non può nelle infinite diverse forme ritrovar l' unità; dunque non si può ritrovare il vero nella Geometria.

Dor. La quantità in genere è vera, Filotimo, ed esistente, come da Dio creata; l' immenso numero poi delle forme, che la compongono, è appunto la cagion degli errori della nostra mente; perche generando nella nostra mente una quasi infinita diversità d' idee, nelle quali tutte si comprende l' immagine di cose sensibili; queste un torbido, confuso, e violento moto nella corporea machina cagionando, la mente turbano, e confondono per modo, che strascinata da sensi nell' error si sommerga. Ma Iddio, il quale mai abbandona l' huomo del suo soccorso, ha concesso alla mente umana la facoltà di potersi astraere da queste forme, e per lo mezzo dell'astrazione, contemplarle in generale. Quest' astrazione è quella, che appresta all' huomo la facoltà di ridurre le proprie idee all' unità: imperciocche quando la mente umana, in se stessa ritirandosi, si astrae da i particolari, le proprietà delle cose sensibili ella rimirando in generale, le rimira come una. Questa sì fatta proprietà poi della mente umana è cagionata, Filotimo, dall' alta origine, dalla quale ella discende, ch' è Iddio;

imperocche quando l'anima cade nella materia, sentendosi battuta dalle infinite scosse de' sensi, ella conserva sempre in se medesima un desiderio di ritornar colla contemplazione al suo primo fonte, il quale è Iddio, e nel quale l'unità di tutte le perfezioni si comprende. Giunta poi, ch'è la mente all'acquisto di questa nobile facoltà di poter contemplare in Dio la natura, e l'essenza delle cose particolari; ella acquista ancora la facoltà di conoscere ne' particolari un vero in quanto al modo dell'essere, ciò che vale a dire, che la mente conosce con sicurezza, che un tale particolare non può essere in altro modo, che in uno: e quindi è, che la nostra mente è sicura delle verità particolari, che la Geometria c'insegna.

Fil. Son forse queste le idee innate di Platone?

Dor. Appunto, Filotimo; perche le idee innate altra cosa non sono, che le idee del vero; e come che il vero per se sia solo Iddio, la prima idea innata della mente è quella, che abbiamo d'Iddio: poscia quelle, che dall'idea delle sue perfezioni in noi, come da limpidissimo fonte discendono, e tutte le altre, che sono nella mente umana, sono idee acquistate, come formate dalla mente a cagion del corpo, nel qual risiede: onde le idee innate sono le idee di Dio, e di quelle cose, che immediatamente dalle perfezioni d'Iddio dipendono; come sono appunto l'idea del giusto, e dell'onesto, le quali sono in noi, a cagion che in noi è la copia di tutto quello, che in Dio è per essenza; la onde essendo lui la verità, e la giustizia per essenza, in noi è l'idea della verità, e della giustizia, per mezzo della quale possiamo divenir giusti, ed onesti.

Fil. Ottimamente voi ragionate. Ma ditemi un poco; la sola astrazione dunque è quella, che ci conduce a fare idea di questa verità in genere, che voi dite?

Dor. Come che questa unità non è sensibile, senza l'astrazione dalle cose sensibili non potete pervenire alla perfetta conoscenza della verità, e con essa delle altre verità,

rità, che da quella dipendono.

Fil. Ma io sento bensì, che in me è naturale il desiderio, di astraermi dalle cose sensibili; perche sperimento in me medesimo, che la mia mente più, e più volte ama di alienarsi dalle sensibili cose, e ritirarsi in se stessa; ma non veggo con quai mezzi ella pervenga a questa unità, che voi mi dite.

Dor. Quando a voi sembra, Filotimo, di astraere la vostra mente dalle sensibili cose, non seguendo l'ordine, che la natura ha posto in voi per ragionar sopra le materie astratte; voi altro non fate, che astraervi da un oggetto sensibile, e passar ad un altro pur sensibile oggetto, perche solamente l'ordine è quello, che conduce alla conoscenza dell'unità in genere, o del modo dell'essere d'una cosa particolare.

Fil. E qual'è mai quest'ordine, che la natura ha posto in me, il qual è valevole a far sì, che io perfettamente ragioni sopra le cose astratte?

Dor. La Geometria, la quale v'insegna d'astraervi dalla quantità, e ragionar con perfettissimo ordine.

Fil. E con quai mezzi?

Dor. Per il mezzo del sillogismo, il qual'è un discorso posto nella nostra mente dalla natura, nel quale si contiene la perfetta unità. Che sia così; nel sillogismo, la magiore entra nella minore, e la minore, che contiene la magiore non è che una; la magiore, e la minore entrano nella conseguenza, e formano il discorso, ch'è uno: da ciò vedete Filotimo, che l'ordine è quello, il quale riduce all'unità l'umano discorso, che per se sarebbe vario, ed errante: Così, nel sillogismo, che Iddio ha posto nella mente umana, consiste questa unità, della quale la mente umana è capace; questo sì fatto sillogismo poi la Geometria insegna farlo nelle cose astratte, ed a combinare fra di loro i sillogismi in modo, che porti i suoi discorsi intorno all'astratto fino all'infinito, come in appresso vedrete. Ora, che Iddio abbia posto questo sillogismo nella mente umana, è evidente; per-

che veggiamo i fanciulli far questi sì fatti sillogismi sopra le cose sensibili, i quali poi generano quell' umana prudenza, colla quale la vita umana si regge; è diversa però dalla Sapienza, la quale è valevole a formar non solo il semplice cittadino, ma il legislatore, appunto come, se voi leggerete la mia Vita Civile, vedrete, che io l' hò detto nel primo, e secondo ragionamento. Considerate di più, Filotimo, che in questo raziocinio, da Iddio alla mente umana concesso, si scorge la differenza, che vi è frà Iddio, e l' huomo; imperocchè Iddio, ch' è la verità istessa, tutto il vero è a lui sempre presente, nè ha bisogno di pervenire alla conoscenza del vero per mezzo de i sillogismi, i quali formano il raziocinio; in vece che l' huomo, per lo mezzo di sì fatto soccorso, è valevole a salire alla conoscenza del vero bensì, ma sempre col mezzo di non poco penosa fatica; ond' è, che l' umano discorso altro non sia, che un rimedio da Dio dato all' huomo a cagion dell' inferma umana natura, il quale umano discorso tutto nel raziocinio geometrico si comprende.

Fil. Voi vi siete troppo immerso nella Metafisica, e perciò ormai troppo dilungato dal nostro proposito. Io vorrei sapere, come per lo mezzo di questi sillogismi, o sia del raziocinio, si formi l' idea generale del vero, il quale, siccome avete detto, nell' unità consiste?

Dor. Voi mi avete richiesta l' idea del vero, ch' io ho fatta in conseguenza della Geometria, e questa, che io vi hò narrata, appunto è l' idea, che del vero in generale ho fatta in conseguenza della Geometria, che hò studiata.

Fil. Dunque voi avete dedotta la Metafisica dalla Geometria?

Dor. Certamente.

Fil. E come?

Dor. La Geometria è la Metafisica della quantità, perche da quella s'astragono da i corpi cose, che non sono realmente esistenti, come sono li punti, le linee, e le super-

perficie; e poscia le dimostrazioni da altro non si formano, che da un aggregato de' sillogismi, tutti veri a parte a parte, e l' uno dall' altro dipendenti, per modo tale, che nella conclusione di una dimostrazione, vi si comprende perfettamente quell' unità, nella quale il vero consiste: e quindi è, che l' idea della Geometria è tanto innata in noi, quanto in noi è innata l' idea del vero: Così Filotimo, non vi è buon metafisico senza Geometria, nè buon geometra se non è buon metafisico; perche la Geometria è scala, per la quale si ascende alla Metafisica, come quella, che guida con ordine naturale la mente a volar nell' astratto: ma la Metafisica è quella, la quale fà, che la mente miri, come dall'alto, la scala, per la quale è salita, e fà altresì, che di ogni particolare facciamo la giusta idea, ne miriamo le parti, e che le idee, ché delle cose abbiam formate, come nostre le contempliamo. Il solo metafisico è quello Filotimo, che ha l' idea del vero in genere, e chè può formare scienza da ogni particolare, al quale colla sua mente si rivolge.

Fil. Voi mi svelate cose, che fin' ora sono state alla mia mente nascoste, e vedo, come da un' alto monte, quel cammino, che non conosceva nel mentre lo calcava. Ma, di grazia, esaminiamo un poco la Geometria in particolare, e nelle sue parti; ed additatemi la via, per la quale siete salito a queste universali conoscenze.

Dor. Fate uso di quelle reminiscenze, che abbiam dette, e lo vedrete.

Fil. Voi mi avete già addita la strada, ed io son pronto a seguirla.

Dor. Consideriamo prima l' ordine, che tiene Euclide per insegnarci le proprietà particolari della quantità. Per primo, Euclide prende per oggetto della sua scienza il corpo, come prima idea, che alla mente umana si appresenta, subito ch' entra nel teatro di questo Mondo sensibile; e perch' egli vuole bel bello guidarla a ragionar nell'astratto, e in conseguenza di ciò, a tar.

far idea della quantità in genere; egli astrae dal corpo punti, linee, e superficie, e in questa guisa accostuma la mente nelle definizioni ad astraersi, quasi senza avvedersene, dalla materia. Per secondo, vedendo Euclide, che la mente non può tutta in un colpo distaccarsi da' sensi, e che per contemplar ella le proprietà della quantità, quantunque in astratto, ha di mestieri dell' opera de' sensi, egli li permette di poter segnare le sue meditazioni con figure, che sono in parte sensibili, e forma i postolati; ma in quelli egli elegge le più semplici cose, che posson descriversi, come sono, la linea retta, ed il cerchio: Ed in vero queste sono solamente quelle, nelle quali si ritroverebbe perfettamente ciò, che la mente intende, se l' infermità de' nostri sensi non ci vietasse di poter perfettamente eseguire in pratica le cose in quella guisa, che la mente le intende. E quì è da notarsi, Filotimo, che Euclide, a gran ragione, non ammette per linee geometriche quelle, che sono più composte; e ciò perche quelle, che non si descrivono da punto a punto, o con centro, ed intervallo, non sendo semplicissime, la mente intende, che in quelle sì fatte linee, come non semplici, non si contiene perfezione; laonde non possono in pratica altro dare per lor natura, che una semplice approssimazione al vero: in vece che la linea retta, e il cerchio essendo semplicissime, niente manca dalla lor parte per darci in pratica quello, che colla mente intendiamo; e se non possiamo ciò in pratica perfettamente eseguire, questo non da altro, che dall' imperfezione de' nostri sensi, e non da quella delle linee, che Euclide ci permette, vien cagionato. Così dunque dall' aver Euclide permesse le più semplici operazioni, che posson farsi, si vede, che il primo oggetto d' Euclide è stato di coltivare il puro raziocinio, e sfuggir dal meccanico, senza però dilungarsi dall' ordine della natura, ch' è quello di trattar le cose sensibili, come sensibili, e le pure astratte, come puramente astratte, sotto-

sottomettendole però tutte alla ragione, ed al discorso. Per terzo, voi avete veduto Filotimo, per quel che abbiamo ragionato poc' anzi, che l' essenza dell' umano raziocinio e il sillogismo, nel quale si contiene l'unità; ed Euclide appresenta alla mente umana gli assiomi, li quali altra cosa non sono, che verità notissime, o siano sillogismi primi. Che sia così, quando la mente dice, il tutto è maggior della parte, altro non fà, che considerar la parte, e il tutto, e dice: Quello che contiene è magior del contenuto, il tutto contiene in se la parte, dunque il tutto è magior della parte; in questa guisa la mente fà sopra la quantità quello stesso, che, come vi hò detto poc' anzi, naturalmente fanno i fanciulli sopra quelle cose, le quali hanno i sensi per oggetto. Per quarto poi, passa Euclide a combinar questi sì fatti raziocinj, per formare le proposizioni, che di magior numero di sillogismi, l' un dall' altro dipendenti si compongono; e in questa guisa, passando sempre la mente umana dalle cose note, alle ignote, si solleva sopra l' oggetto della quantità fino, a penetrare nelle più astratte meditazioni; Per esempio, l' accorto geometra rammentandosi, che le linee, che partono dal centro, e terminano alla circonferenza di un cerchio, sono uguali fra loro, dice in se stesso: se mi vien data una linea retta, io prendendo quella per semidiametro d'un cerchio, posso avere una linea uguale a quella data; poscia descrivendo dall' altro punto estremo della medesima linea, un cerchio, possa avere un altra linea uguale alla data; dunque avrò due linee uguali alla data; e se avrò due linee uguali alla data, tutte tre saranno uguali frà di loro, ed io avrò il triangolo equilatero; ed ecco, che combinando Euclide i sillogismi, ritrova le proprietà particolari della quantità, e combinando in questa guisa poi fino all' infinito i sillogismi, ritrova infinite proprietà della quantità. In oltre, per insegnare a noi le proprietà, che hà ritrovate, ricorre all' ordine, e forma le dimostrazioni. Quest' ordine è quello, che ha la

forza.

forza di ridurre all' unità quelle cose, che per se stesse sarebbero diverse, quantunque l' una dall' altra dipendano: per esempio, egli forma per primo la proposizione, nella quale espone quello, che per lo mezzo del suo industrioso discorso ha ritrovato; per secondo nell' esposizione lo chiarisce; per terzo nella costruzione c' insegna far quello, ch' egli hà fatto per ritrovar la proposizione; per quarto, richiamando alla sua reminiscenza i sillogismi, cò i quali hà ritrovata la proposizione, e i quali l' uno dall' altro dipendono, li narra a noi con quell' istesso ordine, col quale hà gli uni dagli altri dedotti, e formando una catena d' illazioni, l'una dall' altra dipendenti, forma la dimostrazione. Finalmante deduce dalla dimostrazione, la conclusione, nella quale ugualmente, che nel sillogismo semplice, la perfetta unità si contiene: imperciocche nella costruzione non si può fare alcuna cosa, che non serva a quello, che si è proposto; nella dimostrazione si contiene quello, che nella costruzione si è fatto; ed oltre a ciò, vi si contengono i sillogismi, per mezzo de' quali si è ritrovato quello, che si e supposto, onde i diversi sillogismi, perche l' uno dall' altro dipendono, fanno l' officio di un solo sillogismo; e quindi è, che nella conclusione la perfetta unità si contiene. Euclide poscia ritrovata una proprietà la pone per base, sopra della quale egli possa in alzar la sua fabbrica, ed altre verità ritrovare; e in questa guisa deducendo sempre nuove verità dalle verità, che discopre, forma quella mirabil catena di proposizioni, per mezzo della quale egli solleva la mente umana fino alle più astratte conoscenze, che han la quantità per oggetto. Alla persine Euclide fa a guisa di un prudente, e accorto Aumentatore del proprio avere, il quale una semplice, e picciola facoltà accresce prima con la propria industria; poi ponendo sempre a profitto quelche guadagna, e ritraendo sempre con buon ordine da guadagno nuovo guadagno, all' acquisto d' immense ricchezze perviene. Dell' istesso modo Euclide

de per mezzo delle notiſſime, e generaliſſime verità, che ſi contengono nell'aſſiomi, acquiſta la conoſcenza di quello, che ſi contiene nel primo problema; da queſte due conoſcenze unite acquiſta la terza, e queſto progreſſo egli porta all'infinito, per modo che arricchiſce la noſtra mente di un numero innumerabile di conoſcenze particolari, riguardanti le proprietà della quantità. Queſto è l'ordine, che Euclide ſiegue nella ricerca, e nella ſpiega delle ſue particolari propoſizioni. Vi ſembra egli, Filotimo, che queſto ſia induſtrioſo; ed oltre a ciò, conforme all'ordine di ragionare, che la natura ha poſto in noi?

Fil. Induſtrioſo, e in tutto conforme all'ordine, che la natura ci addita, mi ſembra il modo di ragionare, che Euclide ci moſtra. Però ditemi un poco; non ſarebbe egli meglio aſtraere a dirittura la mente umana dal ſenſibile, ed abbituarla ſul bel principio, a conſiderar la quantità in aſtratto, come han fatto molti moderni?

Dor. Nò Filotimo mio, perche ciò s'oppone a dirittura alle leggi della natura, guaſta la noſtra mente, e fà sì, che noi non conſeguiamo il noſtro fine. E in vero, chi voleſſe a dirittura ergerſi dalla materia, che l'imprigiona, ſenza paſſar per quei gradi, che la natura ci addita, ſarebbe appunto come colui, il quale avendo il piede ſtrettamente cinto da una catena, tentaſſe con violenza di ſcioglierlo, egli potrebbe ſtrappare il piede, ma non liberarlo da quella ſenza guaſtarlo; così l'anima non può, ſe non a poco a poco, e per gradi, alzarſi ſopra le idee, che forma a cagion della materia, che da tutte le parti la circonda, e la percuote: ma volete vedere, quanto l'ordine di Euclide ſia naturale? Oſſervate, ch'anco ne' ſenſi, gli huomini formano a loro medeſimi una geometria torta, e guaſta; ma torta, e guaſta a ſola cagione, che noi non poſſiamo, come vi hò detto, ritrovare il vero in altro, che nell unità; e perciò non poſſiamo ritrovarlo ne' ſenſi, e nelle paſſioni, che ſon quaſi infinite nel numero, e cagionano

in noi moto, e non ci folleviamo da' fenfi per lo mezzo dell' aftrazione.

Fil. Di grazia, efaminiamo un poco quefta geometria naturale, che l' huomo tenta di formare a fe fteffo ne' fenfi.

Dor. Quando l' anima entra nella materia, ella difegna con nomi particolari le idee, che forma delle cofe fenfibili; ed ecco, che fa a fe fteffa le definizioni, le quali non fono in altro diverfe da quelle di Euclide, fe non che quelle fono aftratte, quefte materiali, e fenfibili; quelle determinate, quefte infinite in numero: Formate pofcia le fopradette fenfibili definizioni, l' anima allettata dal piacere, o fgomenta dal dolore, che fente dalle percoffe de fenfi, forma a fe fteffa certi falfi affiomi, dettati dall' amor del piacere, come per efempio; quel che piace è buono, la tal cofa piace, dunque la tal cofa è buona; e con conclufione a quefta oppofta, conclude altresì, che fi dee fuggire ciò, che non piace. Quefti affiomi formati fopra l' amore del proprio piacere fon la fonte, dalla quale fcaturifcono le noftre paffioni, le quali poi precipitando nell' eccefso, ed andando nell' infinito, nell' infelicità la fommergono; e quefti fon quelli, che come i primi tengono altresì il primo luogo nel noftro animo, come ben avvifa Virgilio, quando dice:

Trahit fua quemque voluptas.

Egli non è già però, che l' anima ammonita dal danno, che fperimenta in molte di quelle cofe, che a lei piacere recato aveano, non formi certi altri affiomi oppofti a quelli, che il fenzo l' avea dettati, come per efempio; quel che nuoce è male, la tal cofa, benche piaccia nuoce, dunque bifogna fuggir la tal cofa, ancorche piaccia; e quefti fon quelli affiomi naturali, rifuegliati in noi dalla rifleffione, che la mente fa fopra l' utile, e il danno, che il piacere in lei cagiona; e quefti fono altresì quelli, i quali fogliono arricchir l' animo di quel naturale giudicio, che farebbe valevole a reggerci coll' ajuto delle buone leggi, nel corfo della

noftra

nostra vita, se l'amore, che prima l'anima contrae verso il proprio diletto, non facesse sì, ch'ella obbliasse di legieri questi utili assiomi, da' quali, come abbiam detto, il naturale giudicio dipende. Forma pur l'anima ne' sensi, come nella Geometria, i suoi raziocinj composti, i quali equivagliono a i teoremi; e questi son quelli, i quali son cagione, che le umane passioni sino all' infinito si accreschino; imperciocche, tessendo l'anima i suoi discorsi sopra l'oggetto delle passioni, nel quale, come abbiam detto, non essendovi l'unità, non vi è altresì il vero, è forza che vada sempre errata; per esempio. L'anima, formate che ha le sue massime, cioè i suoi assiomi in conseguenza delle proprie passioni, medita sopra i mezzi, che al conseguimento di quel che brama conducono, e medita sino all' infinito, sempre affaticandosi di dedurre nuove conseguenze da quelle massime, che la propria passione le suggerisce come vere; ed aggiugnendo ancora voglie a voglie, fini a fini sino all' infinito, ella fà quello nel regno de' sensi, ma con discorso tumultuante, e precipitato, che un perfetto geometra fa nel regno della ragione con ordinato raziocinio; e ciò avviene, perche le sensibili cose sendo infinite, e diverse, agevolmente ci dilungano dalla conoscenza del vero, quando avviene, che nostra mente non conosca la lor natura: ed oltre a ciò, perche cagionando in noi violento moto le idee, che per lo mezzo de' sensi formiamo, la mente è strascinata ad ammettere, senza perfetto esame, quei giudicj, che fà intorno alle sensibili cose; e quindi è, ch'ella passa sempre torbida, ed inquieta da desio, in desio, d'errore in errore. Nella Geometria all' incontro, nella quale, quantunque si contempli la quantità, si contempla però sempre un vero unico in quanto al modo particolare dell'essere; la mente cammina sempre da vero in vero, e in conseguenza di quello, si fa passaggio da quell' oggetto sensibile alla meditazione delle cose infinite, ed eterne; e finalmente si passa da i veri particolari al vero per

se, e si forma l'idea di quel vero unico, dal quale la giustizia, e tutti i veri particolari, che sono in noi, discendono: e siccome da quella naturale geometria, che vi ho descritta (se gli obblii all'huomo troppo naturali, non si opponessero all'umana ragione) potrebbe formarsi un'onesto cittadino; da questa Geometria si forma un sapiente filosofo, un perfetto legislatore: Perche alla perfine in quella guisa, che nella mia Vita Civile ho detto, niun'altra, cosa fuor che la vera Filosofia, la quale è quella, che insegna a conoscere, e seguire il vero unico, è atta a produrre i moderatori de' nostri costumi, e i senatori: e che sia così. Mai vedrete Filotimo i veri geometri, li quali hanno accostumata la lor mente a conoscere il vero, ch'è uno, albergare nel loro animo la materiale dottrina d'Epicuro, nè il vano errore de' Scettici, ma bensì la scienza di Platone, e quella de' Stoici, le quali sono state madri delle leggi, e delle Repubblice. Vedete voi dunque Filotimo, quanto la Geometria sintetica sia conforme a quel raziocinio, che la natura ha posto in noi; e vedete altresì, che quando la mente umana cammina libera, e sciolta, per quel cammino, che i senzi gli suggeriscono, ella cammina per la strada, che la Geometria li addita, e non và errata, se non a cagione, che son falsi i principj, sopra i quali fondò i suoi discorsi; ed oltre a ciò, perche non vi è verità nè i fini, che a se propone, e perche e solamente dal senso guidato il metodo, col qual'ella ragiona: in vece che nella Geometria, i principj son veri, e nell'oggetto de' suoi discorsi vi è quella unità, nella quale il vero consiste, e il metodo di ragionare è sempre giusto, ed ordinato, come quello, che sempre da antecedenti, che son veri, dipende; onde è che a gran ragione gli antichi chiamorono questa scienza *Mathesis*, che vale a dire disciplina. Vi mostra ancora quanto sia conforme a quel discorso, che la natura ha posto in noi, l'ordine, ch'Euclide tiene nella catena delle sue proposizioni.

Fli. Di

Fil. Di grazia, narratimi questo sì fatto ordine, perche io già sono così invaghito delle riflessioni, che sopra la Geometria avete fatte, che non voglio più interrompere i vostri discorsi.

Dor. Dopo avervi mostrato l' ordine, che Euclide tiene nelle proposizioni particolari, vi mostrerò quello, che tiene nella serie delle sue proposizioni. Comincia egli la serie delle sue proposizioni da un problema, nel quale vi fa conoscer l' uso degli assiomi, o sia di quelle verità prime, e semplici, che come note, non si possono dimostrare; e in quello v' insegna altresì la differenza, che vi è fra la meccanica costruzione, e la geometria; perche se, per esempio, un saggio maestro, dopo avervi fatta leggere la prima proposizione d' Euclide, vi dicesse, fate questo problema, voi vedendolo facile, meccanicamente fareste un triangolo di tre lati fra loro uguali; ma se il maestro poi vi rispondesse, io non credo, che questi lati siano uguali; voi non potreste altra ragione assegnarli, se non che la misura, che vale a dire, la meccanica costruzione, la quale voi esaminareste col senso, non con la mente. Fingete poi, ch' egli vi spiegasse la dimostrazione in questa guisa, non vi farebbe egli conoscere la differenza, che vi è fra l' intendere, ed il sentire, fra la ragione, ed il senso, frà la dimostrazione geometrica, e la meccanica, perche voi conoscereste la differenza, che vi è fra il misurare, e il dar ragione di quello, che si misura.

Fil. Oh Signor Doria, voi havete fatto un ben lungo comento alla prima proposizione, e pur questa è quella per la quale i moderni tacciano Euclide. Dicono essi, ch' è contrario al buon ordine cominciar da un problema, ma che si deve cominciar dal teorema, nel quale la mente vede più in astratto la verità proposta.

Dor. Questo è il primo errore de' moderni critici d'Euclide: imperciòcchè dovendosi l'anima astraere da sensi, come vi hò detto, per gradi proporzionati, ed alla natura conformi; Euclide non poteva cominciare da al-

tra

tra proposizione più atta al suo fine, che da questa, nella quale il senso v'ispira di farla per pratica, e poi vedete, che di quello stesso, che avete fatto per pratica, non ne potete assegnar la ragione, se non ricorrete a quelle verità prime, e semplici, che sono nella mente, e non nel solo senso riposte. Oh. Filotimo; sapete perche la più gran parte de' moderni amano tanto di considerar solamente in astratto le cose? perche vogliono, che noi crediamo per utili, le cose da essi pensate, le quali in vero non hanno alcun' uso; oltre che la mente non ne forma alcuna vera idea, avvenga che le considera con segni di lettere dell' alfabeto, e per mezzo de calcoli, come a cose pratiche, la mente non fà alcuna attenzione alla ragione, perche nelle loro dimostrazioni non vi è l'unità, nè si possono intendere per vere in pratica, perche la loro costruzione non è semplice: questo però lo vedrete in appresso.

Fil. Proseguite dunque a narrare l'ordine, che tiene Euclide nella serie delle sue proposizioni.

Dor. Osservate, Filotimo, che nelle prime otto proposizioni Euclide vi propone due modi di argomentare, che vuole usare in Geometria, cioè il positivo, e il negativo; e il negativo lo propone di due maniere, una è, quando l'assurdo nasce a cagione, che quella proprietà, che si propone, ripugna ad una cosa al senso manifesta, come nella quarta; e l'altra, quando l'assurdo nasce dalla ripugnanza, che s' incontrerebbe con una cosa dimostrata, se ciò che si propone, fusse in altro modo, diverso da quello, che si propone: e qui vedete com' egli vi fa conoscere, che il discorso astratto serve solamente per sviluppar le cose, che son composte, ma che le cose chiare, e note al senso, non si possono per lo mezzo di quelle verità, che l'una dall' altra dipendono, dimostrare, quantunque non si possono a buona ragione impugnare; che sia così. Euclide negl' assiomi vi propone verità prime, ma astratte, le quali sono sillogismi primi, e semplici, e perciò non han

hanno bisogno di dimostrazione. Nella quarta proposizione poi, vi propone una verità nota al senso, ma non vera per se, perche non semplice, e prima, come gl' assiomi, e perciò non può darla, come gl' assiomi per vera, nè come le proposizioni astratte, e composte dimostrarla; e quindi è, che la dimostra colla soprapposizione de' triangoli, ch' è una specie di dimostrazione sensibile, e razionale tutt'ad un tempo. All' incontro nella settima mostra l' assurdo, che ne avverrebbe, se la cosa fusse in altro modo da quella, che propone; ma l' assurdo lo fa nascere, ragionando con quella catena di verità, l' una dall' altra dipendenti, nella quale consiste l' essenza della dimostrazione, e non prova, come nella quarta, che ripugna al senso chiaro, e manifesto, ma bensì, che ripugna alla ragione: ed ecco, ch' egli vi fa connscere nelle prime otto proposizioni i legitimi modi di argomentare, e quelli di distinguer le cose, che si discoprono per lo mezzo della dimostrazione, la quale dipende dal retto discorso; e quelli, che dimostrano assurdo, solamente perche ripugnano a cose, che sono al senso manifeste, per modo che, per così dire, con sensibile dimostrazione si provano. Vedete poi, com'egli và sollevando dal sensibile la vostra mente per gradi, che sono sempre in tutto all' ordine della natura conformi: imperciocchè fino alla proposizione XXXII. voi non ne trovate alcuna, che in qualche parte non sia al senso manifesta, per modó che voi direste esser in quella superflua la dimostrazione, e pur egli le dimostra, a fine di accostumare, sopra il facile, la vostra mente a dimostrare, e a non ammetter cosa, che non sia dimostrata. Poscia nella XXXII. vi propone una cosa in tutto al senzo ignota, e la quale senza la dimostrazione mai potreste intendere. Ed ecco, che, Euclide vi ave accostumato tratto tratto a dimostrare quelle verità, che hanno molto del sensibile, per render la vostra mente atta, e capace d' intendere quelle proposizioni, che sono in tutto dal senso astratte; e con ordi-

ordine ammirabile ha preparata la vostra anima a volar nell' astratto, la quale prima solamente era accostumata, come avete veduto, a non mirar altro, che le sensibili cose.

Fil. Dunque la XXXII. è la prima proposizione, ch' è perfettamente astratta? Io non aveva mai fatta tal riflessione sopra Euclide.

Dor. Certamente Filotimo, perche quelle prime proposizioni, che riguardano i triangoli, e le linee parallele, sono in qualche parte al senso note: Ma considerate, di grazia, l'ordine, col qual'egli vi ha condotto ad intendere una cosa in tutto al senso ignota, ed astratta.

Fil. Qual' è egli?

Dor. Quello di dedurre sempre dalle cose note le ignote, formando sillogismi, l' uno dall'altro dipendenti, per modo che la mente giunge a far idea di cose in tutto al senso oscure; come sono la celebre Pittagorica, la XII. e la XIII. del Secondo; la XXXVI. del Terzo, la proporzione in genere applicabile a tutte le quantità, le quali egli spiega nel Quinto: oltre a ciò, la proporzione applicata alle superficie nel Sesto. Alla perfine per l'ingegnosissimo artificio di dedurre le cose note dalle ignote per lo mezzo de' sillogismi, vi conduce nel X. Libro a fare idee di quelle quantità, che per lo più dalla nostra mente s'intendono, senza che mai possiamo in alcun modo esprimerle, come sono le quantità irrazionali. Quì vedete, Filotimo, che la Geometria sintetica è quella sola, che ha la potenza di fare, che la mente, per lo mezzo della dimostrazione, faccia idea chiara, e distinta di quelle cose, delle quali aveva solamente idea oscura, e confusa, e tutto ciò con ordine sempre a quello della natura conforme; perche ella alla conoscenza di queste astrattissime verità vi solleva, alzandovi dalle idee sensibili, senza sforzo, e per gradi proporzionati alla mente umana, la quale, come abbiam detto, nel comparire alla luce del Mondo, e tutta involta nella materia. Ecco, Filotimo, come Eucli-

de

de appresta a suoi discepoli, per lo mezzo della propria industria, e del naturale raziocinio, un ricco patrimonio di conoscenze.

Fil. Gli effetti, che avete narrati sono veramente quelli, che la Geometria sintetica nella nostra mente produce; e vedo, che coll'uso della Geometria sintetica ben studiata, si forma, tutto ad un tempo, una mente metafisica, e pratica: Ma, a dirvi il vero, io bramo un poco sapere, come sia tanto ammirabile, quanto voi dite, l'ordine, che Euclide tiene nella serie, o sia nella catena delle sue proposizioni; imperocchè intorno all'ordine pocomen che tutti li moderni lo tacciano. Dicono essi, ch'egli confonde, l'una coll'altra, le materie, delle quali tratta, perche non le tratta per ordine: per esempio, il cerchio è una figura più semplice, che le trilatere, e le quadrilatere, ed egli tratta prima le proprietà delle quadrilatere: gli angoli sono ancora più semplici, che i triangoli, e il cerchio, ed egli non li tratta distintamente: ora da tutte queste cose nè deducono, che non fa egli passaggio dalle cose più semplici alle più composte, come il buon ordine addimanda.

Dor. Voi potete da voi medesimo intendere, quanto sia vana questa taccia, che ad Euclide si dà: imperciocchè egli non poteva, siccome vi hò poc'anzi detto, se non che cominciando da'triangoli, far sì, che la mente umana conoscesse prima i modi, con i quali hà d'argomentare in Geometria, e l'essenza della dimostrazione, e la differenza, che vi è frà la dimostrazione meccanica, e la geometrica: oltre a ciò osservate Filotimo, come più volte vi ho detto, quanto l'ordine, che tiene Euclide sia uniforme a quello, che la natura in noi ave inserito. Dovete sapere Filotimo, che quando l'anima si considera come al corpo congiunta conosce, che quelle considerazioni, che nel principio sono a lei più facili, son quelle, che meno son distaccate dal senso, o per meglio dire quelle, che sono al comun senso più note, e meno astratte. Ora considerate Filotimo, le propo-

 sizio-

sizioni del primo Libro sino alla XXXII., le quali riguardano i triangoli, e le linee paralelle; e troverete, che, siccome vi hò detto, son quasi tutte proprietà al senso manifeste. Considerate poi il terzo Libro, e troverete bensì proprietà, che per lo mezzo di facilissimo raziocinio si dimostrano, ma non già tanto al senso manifeste, quanto le figure trilatere, e le quadrilatere; e ciò a cagione, che il perfetto cerchio, essendo una figura, che sente dell' unità, e in qualche parte dell'infinito, non può mai essere alla mente così sensibile, come lo sono le figure trilatere, e le quadrilatere, le quali, come composte, partecipano più della natura corporea, e sensibile. Così dunque, Euclide, il quale volendo disciplinar la mente umana, la quale si considera come posta nel corpo, credeva a gran ragione, che i gradi di conoscenze, per li quali la doveva far passare, fosser quelli, che la conducono tratto tratto, e bel bello dal più sensibile al più astratto, per distaccarla ordinatamente, e senza violenza da' sensi; e perciò dovea cominciare dalle figure trilatere, come hà fatto. Ma volete veder di più, quanto sia vero, che Euclide ha creduto, che l'ordine, che si deve tenere per distaccar l' anima dalle cose sensibili, essendo al corpo congiunta, sia quello di farla sempre passare dal più sensibile, come ad essa più facile, e più naturale, al più astratto, come più difficile, e più ripugnante ad essa medesima; osservate le materie, ch' egli prende a trattare in tutta la serie delle proposizioni, che ha ordinate, e vedrete quanto egli perfettamente siegue l'ordine di sentire, e di ragionare, che la natura ha posto in noi.

Eil. Essendo vero questo principio di Euclide, che riguarda le proprietà dell'anima, la vostra proposizione è certissima: e in vero a me sembra, che 'l più facile all'huomo sia il più sensibile. Ma seguite di grazia, le vostre degnissime considerazioni.

Dor. Quando l'anima apre gl' occhi in questo teatro del Mondo sensibile, la prima idea che forma, a cagion del

del corpo nel qual risiede, è l'idea del corpo di trè misure; e la prima proprietà, che considera ne' corpi di trè misure, è la differenza di più e di meno, e l'uguaglianza, ch'è frà quelli; ed Euclide, seguendo l'ordine della natura, fa considerare alla mente solamente l'uguaglianza, e la differenza di più, e di meno, ch'è fra le superficie: ond'è, che la guida a meditar nell'astratto con quello stesso ordine, col qual'ella inclina a ragionar nel sensibile. Poscia osservate, che la mente da se medesima, considerando il corpo, si sforza d'alzarsi dalle idee materiali, per considerare alquanto più in astratto la quantità; e che perciò comincia a considerar ne' corpi una certa relazione, ch'hanno fra di loro: per esempio dice. Vi è tanta differenza di grandezza fra tal corpo, e quell'altro, quanta ve n'è fra il tale, ed il tale: e lo stesso argomento fa nelle cose morali, e in tutti gl'altri suoi discorsi; la qual cosa mostra, che l'idea della proporzione è in noi. Così Euclide nel quinto Libro, avvalendosi dell'oggetto delle semplici linee, alza la mente a considerare in astratto le proprietà generali della proporzione; in quello insegna la mente a conoscere la proporzione, ch'è fra trè, o quattro quantità insieme paragonate; indi insegna a far paragone fra le proporzioni medesime, prendendo un'intiera proporzione di quattro termini come una sola, e quella con altre intiere proporzioni paragonando: dalla qual cosa nasce, che la mente umana porti le idee, che ha della proporzione, ch'è fra le quantità, fino all'infinito, come si vede nella proposizione XI. del Quinto. Così formata la vostra mente di un modo, che già è valevole a fare un'idea in generale della proporzione, ed a moltiplicar le proporzioni fino all'infinito, applica di nuovo nel VI. la proporzione alle superficie, lasciando a voi libero il campo di applicar le proporzioni a tutte le altre specie di quantità, come sono, per esempio, il moto, il suono, e tut-

te le altre, che la quantità han per oggetto. E voi poi continuando a paragonar l'ordine, che la natura ispira alla mente umana, con quello, che siegue Euclide, vedrete Filotimo, che dopo, che la mente ha formate sopra le cose sensibili le sue idee, ella naturalmente inclina a mostar con segni, i quali siano valevoli a farli distinguere le proprietà particolari, e le parti minute di quelle cose, delle quali ha fatto idea per lo mezzo dell'astrazione. Ed Euclide applicando nel VII.VIII.e IX.Libro a i numeri le stesse proporzioni, ch'ave applicate nel Sesto alle superficie, insegna fare in numeri molte di quelle cose, ch' ave insegnato far con linee; e con ciò appresta alla mente il comodo di poter più in particolare, e più distintamente additar con segni; più che le linee, sensibili, perche più particolari, le idee della quantità, che ha formate: perche se, per esempio ragionando di linee rette, la mente dice, la linea A è alla linea B, come la linea C alla linea D; poscia, mercè il soccorso de'numeri, dice, la linea A, ch'è 2, è alla linea B, ch'è 4, come C 8, a D.16, e quì la mente vede con numeri più distintamente, e più in particolare la quantità di quelle sì fatte linee A,B,C,D, che non le vede solamente con linee segnandole: ed oltre a ciò, i numeri fan sì, che la mente, vedendo quelle cose, che non può mai designar con numeri, come per esempio, le radici irrazionali, conosca, ch'ella può far idea di molte proprietà, che non può mai sensibilmente esprimere: dalla qual cosa ne deduce la differenza, che vi è frà le conoscenze pure, e le sensibili; e quel ch'è più, nelle proprietà de' numeri ben considerate si ritrova l'esempio sensibile di quelle cose più astratte, che la Metafisica c'insegna; perche nell'unità, la quale nel medesimo tempo ha le proprietà di tutti li diversi corpi fino all'infinito moltiplicati, senza mai lasciar d'esser unità, si vede un esempio imperfetto dell'immensità, e dell'immutabilità di Dio, il quale è in tutte le cose, senza mai lasciar d'esser Uno, e molte, e molte altre pro-

prie-

prietà de'numeri, che lungo fora, tutte annoverarle; le quali ci danno un esempio sensibile delle proprietà delle cose infinite, ed eterne; le quali cose han fatto forse dire al nostro Galileo, che ne i numeri vi è qualche cosa di divino. Nel X. Libro poi alza Euclide la vostra mente a considerazioni tanto astratte, che sono l'ultimo affinamento, che nell'oggetto della quantità può far la mente umana; e in quello vi fa altresì conoscere coll' esempio delle quantità commensurabili, e incommensurabili i limiti di quelle proprietà, che potete sensibilmente esprimere, e di quelle, che non potete mai esprimere, quantunque chiaramente, e distintamente le intendiate. Poscia concludendo, che la diagonale non ha proporzione esprimibile in numeri col lato del quadrato, perche il lato, e la diagonale sono solamente commensurabili in potenza, non in radice, vi dà una pruova di quello, che delle incommensurabili vi hà insegnato. Alla perfine dopo aver alzata la vostra mente fino all' ultimo affinamento dell'astrazione, sempre facendovi ritornare al concreto, ed al sensibile; ed applicando a i corpi, nelli seguenti Libri, le proprietà generali della proporzione, vi insegna formare li corpi solidi, e vi addita per quanto può le proporzioni, che son frà quelli: e in questa guisa dopo terminata la serie delle sue ammirabili proposizioni, riconduce la mente a quei corpi di tre misure, da' i quali l'ha sollevata per lo mezzo delle astrazioni, nelle definizioni del primo Libro; e vi fa vedere le proporzioni, ch'hanno fra essi, con idee tutte diverse da quelle, colle quali prima le miravate. Così dunque, Filotimo mio, Euclide, seguendo l'ordine di ragionare, che la natura ha in noi inserito, porta l'umana mente a raziocinar nell'astratto fino ad un segno, che è l'ultimo affinamento, al qual può giungere per lo mezzo del buon ordine; e poscia sempre c'insegna a ritornare al sensibile, e cogliere in questa guisa il frutto delle nostre astrazioni. Ecco dunque, che meditando voi da metafisico sopra quello,

che

che la vostra mente ha fatto, quando avete la Geometria studiata, vi avete formata una mente metafisica, egualmente atta a meditar sopra l'astratto, che a ritornare al concreto, ed al sensibile.

Fil. Ammirabile, e da perfetto conoscitore della mente umana è in vero l'ordine, che tiene Euclide nella serie delle sue proposizioni: ma con tutto ciò, i moderni di molti difetti lo accusano; e per primo dicono, ch'egli non ha ben definita nel quinto Libro la proporzione; imperciocchè gl' equimoltiplici, de'quali si vale, non ben adequano l'idea, che della proporzione dobbiam fare, ond'è, che la proporzione non è ben definita: E in vero sembrami, che gl' esponenti usati da'moderni esprimano meglio la natura della proporzione, che gl' equimoltiplici; vi dirò poi le altre obbjezioni, che fanno ad Euclide.

Dor. Questa sembra, a prima vista, un' opposizione plausibile, ma se ben si considera la mente di Euclide, si vede, ch' egli a gran ragione non ha usato nel quinto Libro gl' esponenti.

Fil. E perche?

Dor. Non vi hò io detto, Filotimo, che nel quinto Libro Euclide vuole accostumar la mente a rimirare in universale, ed in astratto le proprietà della proporzione; e che poscia nel settimo, ottavo, e nono Libro appresta alla mente il soccorso di poter rimirare per mezzo de' numeri più in particolare, ed in concreto le proporzioni, che son fra le quantità? Dunque se Euclide s'avvaleva degli esponenti, come vogliono i moderni, guastava l' utilissimo ordine, che si era prefisso, e non insegnava la mente a rimirare, prima che in concreto, in astratto la proporzione. Così era forza ad Euclide considerar le parti di quelle linee, delle quali considera la proporzione, e in conseguenza delle parti, considerare ancora li moltiplici, come fa nelle definizioni del quinto Libro: ed ancorche paja, che questa sì fatta definizione degli equimoltiplici non bene adequi la

men-

mente, pure è assai più profittevole questo luogo, che quello degl' esponenti, a cagion che accostuma la mente a rimirare in astratto la proporzione; tanto più che, dopo ch' Euclide vi ha dato il soccorso de' numeri nel settimo, ottavo, e nono Libro, a voi è lecito di applicare li numeri a tutte le proporzioni del Quinto, e vederle in concreto: ed ecco, che già con non lieve profitto della mente le avete vedute in universale, ed in astratto.

Fil. Ma voi avete detto poc' anzi, ch' Euclide ha riputato più facile quello, ch' è più sensibile; dunque dovea spiegare nel Quinto le proprietà per lo mezzo de' numeri, e poi spiegarle per lo mezzo delle linee.

Dor. Questo non poteva fare Euclide, perche nel Sesto vi sono moltissime proposizioni, le quali non possono spiegarsi in numeri; ed oltre a ciò, egli non poteva spiegare le proposizioni appartenenti a' numeri, le quali spiega nel Settimo, Ottavo, e Nono, se prima non applicava la proporzione generale alle superficie, come ha fatto nel Sesto: Imperciocche fra le operazioni numeriche, toltane la moltiplicazione, la divisione, il sommare, il sottrarre, e l' estrazione delle radici quadrate, che si ricavano dal secondo Libro, le altre si ricavano dagl' altri Libri di Euclide; come per esempio, la regola, che chiamano aurea, è la stessa, che la XVI. del Sesto. Così dunque, se Euclide non voleva rimanersi nella spiega della sola proporzione aritmetica, ma voleva insegnarci a spiegare in numeri ancora quelle proprietà attenenti alla proporzione geometrica, le quali si possono esprimere in numeri; era necessario, che prima dimostrasse in linee le proprietà, siccome ha fatto nel VI. Libro. Finalmente Euclide dovea prima trattar la quantità continua, che la discreta, se voleva prima considerare, per mezzo delle linee, la quantità in astratto, e poi rendere, per lo mezzo de' numeri, come

me più sensibili alla nostra mente la proprietà, che ha considerata in astratto; ne poteva Euclide considerare nel particolare de' numeri la proporzione generale, se prima non la considerava nelle linee, e nelle superficie, come ha fatto nel Sesto. In fine doveva anteporre la quantità continua alla discreta.

Fil. Voi rispondete ottimamente a tutte le obbjezioni, che i moderni fanno ad Euclide, ma non sò se potrete rispondere a quella, che ora vi propongo,

Dor. Dite di grazia, perche io sono avvocato di un gran clientolo, mentre l' autore, del quale ho preso la difesa non è difficile a difendersi.

Fil. Dicono i moderni, che nella Geometria sintetica d' Euclide vi è tanto poc' ordine nelle proposizioni, che quando volete risolvere una quistione proposta, siete costretto d'andar tentone ricercando quello, che vi bisogna, in uno immenso numero di proposizioni, le quali tutte han per oggetto materie diverse: per la qual cosa, le soluzioni de' problemi, che si fanno per la via sintetica, oltre l' essere faticosissime, si fanno a caso. In fine dicono, che il geometra nella sintetica opera come colui, il quale dentro una biblioteca scomposta, e disordinata, ritrova a caso quel libro, che li bisogna; perche la mente non ha nella sintetica una via generale, e sicura, per la quale possa indrizzare i suoi passi, e ritrovar con sicurezza il luogo della quistione. Che risponderete a questo Signor Doria?

Dor. Se avete fatto quella idea della proprietà della mente umana, ch' io vi ho insegnato fare sopra Euclide meditando, agevolmente conoscerete, che non è, come i moderni dicono, impropria la Geometria sintetica per la soluzione de' problemi; e che quello, che ad Euclide attribuiscono a difetto, è all'ingrandimento della mente umana utilissimo, e con ottimo consiglio fatto.

Fil. Ma se, come voi dite, è in tutto perfetto l' ordine, che tiene Euclide; tanti libri fatti per facilitare Euclide,

de, e per spiegare le proprietà della quantità, e tanti varj Euclidi riformati, tutti sono inutili, e vani?

Dor. Tutti questi Euclidi riformati de signori moderni, sapete, che cosa sono, Filotimo? sono Euclidi deformati; sono tutti vani attentati, che contro la Geometria degli antichi han fatto i moderni. In fine tutto ciò, che i moderni fanno contro gl'antichi, è appunto, come la guerra immaginaria, che Tito Livio fa fare da suoi Romani ad Alessandro già estinto; che sia così. Dicono essi, ch'Euclide non hà inteso, come i signori moderni, qual sia il vero ordine, che si deve dare alle proposizioni, perche se l'avesse inteso, avrebbe posto in miglior ordine le sue proposizioni, come, a lor dire, han fatto i moderni; ond'è, che poi mostrano un benigno compatimento degli antichi matematici, a cagione, che non si sono avvisati di ricever le curve per linee geometriche; e dicono ancora, che se quelle gran menti fussero vissute in questi nostri tempi, avrebbero veduto quello, che non han mai pensato di vedere: laonde dicono di Euclide appunto quello, che Livio dice di Alessandro: imperciocche Livio dice, che se Alessandro avesse volte le sue armi verso l'Italia, avrebbe trovati in Roma molti capitani migliori di esso; ed i moderni dicono, che se Euclide venisse al mondo, vedrebbe tanti nuovi metodi d'insegnare le sue proposizioni; e ritroverebbe molti matematici migliori di esso. Legete di grazia la prefazione del Sign. Arnaldo, quella del P. Lamy, quella del Signor Raynò, e tante, e tante altre. Ma queste son tutte ciance Filotimo, Euclide intese bene quel ordine, che è naturale alla mente umana, ed Euclide è sempre Euclide, come Alessandro è sempre Alessandro?

Fil. Ma i Romani fecero poi un gran' imperio,

Dor. Sì, ma sapete perche? perche quei primi Romani saggi, e virtuosi non invidiorono, ma imitorono le virtù de' Greci; e perciò gittorono i fondamenti d'una gran Repubblica, nella quale poi vi fù un Cesare, il quale

forse nel valor militare superò Alessandro: ma ciò non sarebbe avvenuto se avessero voluto nel principio non imitare, ma oscurare le virtù de Greci, come appunto han fatto certi nostri moderni, i quali han mosso guerra alla Grecia, pensando di oscurar la gloria d'Euclide, di Pappo Alessandrino, e d'Archimede, e si han figurato un imperio chimerico, come quello, ch'è sopra falsi principj appoggiato.

Fil. Voi forse vi lusingate Signor Doria, perche avete con poca prudenza, (e perdonatemi se ve'l dico) dichiarata la guerra a poco men, che tutta la moderna repubblica de matematici, e piaccia a Dio, che ne usciate coll'onor vostro.

Dor. E' legge eterna Filotimo, che, a lungo andare almeno, la verità debba venire al di sopra; e perciò i signori matematici potranno bensì molestarmi, ma non potranno opprimere le verità, ch'io propongo.

Fil. Così spero, ma ci siamo troppo dilungati dal nostro argomento. Spiegatemi di grazia, come la Geometria sintetica d'Euclide sia, siccome avete detto, più profittevole per la soluzione de' problemi, che la via generale dell'analitica, perche questo è un gran paradosso.

Dor. Quel ch'io hò promesso provarvi, Filotimo, è, che l'ordine, ch'Euclide tiene nella serie delle sue proposizioni, trattando materie, che sembrano, a prima vista, diverse, non toglie, che il metodo sintetico non sia, alla mente umana, più che qualunque altro, profittevole: ed oltre a ciò non impedisce, che la mente non possa, con più profitto, che per le vie generali de calcoli, risolvere le geometriche quistioni.

Fil. Insegnatemi questo di grazia.

Dor. La mente umana inclina, come già vi hò detto, per proprio naturale istinto, a sempre ritornar con suoi pensieri all'unità, e perciò non è mai paga nelle molte, e diverse idee, ma le molte, e diverse idee aspira sempre di comprendere in una sola. Questo si sperimenta ancora quan-

quando la mente si rivolge alle cose sensibili; per esempio. Se voi forastiere entrate in una Città, andate certamente prima considerando le cose a parte, a parte, e formate, di ogn' una di quelle, una particolare, e diversa idea; poi tutte quelle idee particolari insieme unendo, formate una sola idea generale di tutta quella Città, e in conseguenza di quella idea generale, formate un giudicio di tutta quella Città, nel quale giudicio si comprende tutto ciò, che ne' giudicj, a cagione delle idee particolari, prima fatti, si conteneva. Così Euclide, seguendo sempre l'ordine della natura, vi appresta egli nella serie, colla quale ha disposto le sue proposizioni, il modo di poter fare il simile, e formar queste idee, le quali a buona ragione possiamo nomare complesse, perche in ogn' una di esse, molte idee particolari si comprendono. Queste sì fatte idee complesse son quelle, le quali producono in noi la facultà di far sistemi sopra le cose tutte, e ridurle a scienza.

Fil. Datemi di grazia qualch' esempio di quello, che avete detto intorno all' ordine, che tiene Euclide nelle sue proposizioni; e come, per lo mezzo dello studio di quello, si formano queste idee complesse, che voi dite.

Dor. Eccolo. Nelle prime otto proposizioni del primo Libro, nelle quali, come avete veduto, egli ave appresentato alla vostra mente la differenza fra il meccanico, e il geometrico, e li modi di argomentare, che vuole usare; egli vi appresta ancora il modo di fare un'idea complessa della natura in genere de' triangoli, e di stabilire una legge generale per tutti li raziocinj geometrici in ciò che s' attiene all' uguale, maggiore, e minore.

Fil. Di grazia spiegatemi questo, perche io non sono stato valevole a pensar tanto.

Dor. Se voi fate riflessione sù le prime otto proposizioni, trovate la seguente generale proprietà, la quale comprende una proprietà attinente a tutti i triangoli, ed è; che sempre, che nel triangolo voi avete tre qualun-

que cose note, avete noto il rimanente, cioè, le altre tre cose, che si comprendono nel triangolo: perche in quelle otto proposizioni Euclide dimostra, che se in due triangoli avete noti due lati, e un angolo, o due angoli, e un lato, o tre angoli, ovver tre lati, avete nota tutta la quantità de triangoli. Ed ecco un' idea complessa, la quale è generale per tutti i triangoli, e vi serve per la soluzione delle quistioni: e questa legge è una legge generale, ed inviolabile dell' umano raziocinio; perche in tutti li discorsi, che fà l' umano intelletto, voi scorgete, che sempre ha bisogno di trè cose note, per conoscere le trè altre, o di due, per concludere la conseguenza, ch' è la terza: e questa è forse la cagione, Filotimo, per la quale gli antichi Filosofi tanto mistero fecero sopra questo numero ternario. Ed in vero noi veggiamo, che questo sì fatto numero Pitagora lo appellò il numero dell' anima, e ciò a mio credere, a sola cagione, ch' egli considerò, che l' essenza dell' umano discorso è il sillogismo, il quale di trè parti, che sono maggiore, minore, e conseguenza, si compone.

Fil. Veggo gia, che nella Geometria hò trascurato di fare una utilissima riflessione, ed è, ch' hò lasciato di avvertire una cosa, che naturalmente hò fatta intorno alla quantità senza avvedermi di farla. Di grazia, mostratemi le altre idee complesse, ch' io poteva fare.

Dor. Le nostre conoscenze sono figlie delle reminiscenze, dice Platone, come vi hò detto, e in conseguenza di ciò, i nostri errori son figli dell' obblio; e quindi è, che voi, come molti altri, obbliate di considerar nelle cose tutto ciò, che in quelle si può pensare, e vi rimanete nella sola superficie di quelle. Altri poi vogliono affettatamente far nelle cose quelle riflessioni, che non vi capiscono; e con ciò, seguendo la sofistica temeraria, obbliano le reminiscenze importanti, e ragionevoli.

Fil. Egli è troppo vero quel che voi dite; ma di grazia mostratemi le altre idee complesse, ch' io hò trascurato di fare sopra Euclide.

Dor.

Dor. Fattavi fare già l' idea compleſſa de' triangoli Euclide, ſubito vi moſtra un' utile, che da quelli potete dedurre, ed è quello di poter dividere un' angolo, ed alzar perpendicolari, e tirar perpendicolari da un punto alle linee ſoggette: poſcia proſeguendo, in tutto il primo, e ſecondo Libro vi porge materia di formare un' altra idea compleſſa, riguardante l' oggetto di tutta la quantità, conſiderata nell' uguaglianza delle figure trilatere, e quadrilatere; queſta sì fatta idea compleſſa è la ſeguente cioè. Che per lo mezzo della celebre pittagorica, e della traſmutazione, che v' inſegna fare nelle propoſizioni XXXXV, XXXXVI, e nell'ultima del Secondo &c; voi potete fare paralleligrammi uguali a qualunque data figura trilatera, o quadrilatera, o diſſuguali a quella, per qualunque data differenza; e v'inſegna altresì, tutto ad un tempo, a conoſcer quello, che per lo mezzo de i due ſoli primi Libri non potete fare ne' piani: ed ecco un' altra idea compleſſa, nella quale ſi comprendono i limiti della potenza, cioè del poſſibile a farſi, e del non poſſibile a farſi, la quale ſi contiene ne i primi due Libri di Euclide. Nel Terzo, e nel Quarto poi conclude un' altra idea compleſſa, riguardante i limiti di quello, che per lo mezzo de i quattro primi Libri ſolamente ſi può fare, e conſidera l' uguaglianza fra le figure; perchè nel Terzo, per lo mezzo della deſcrizione de i cerchi, v'inſegna di ritrovare angoli uguali frà eſſi, inſegnandovi a conſiderare angoli nel cerchio, nel ſemicerchio, e nelle porzioni di eſſi, ed angoli delle porzioni: Ed oltre a ciò, per lo mezzo delle tangenti, e delle ſecanti, v' inſegna trovare di nuovo paralleligrammi uguali alli quadrati; e nel Quarto v'inſegna ad inſcrivere dentro il cerchio, ed a deſcrivere fuori del cerchio le figure piane rettilinee. Nelli quattro primi Libri dunque voi potete concludere queſta ſeguente idea compleſſa cioè, che noi non ſolo poſſiam fare paralleligrammi uguali, o con qualſivoglia differenza, a qualunque data figura trilatera, o quadrilatera;

ma

ma che di più possiamo inscrivere dentro il cerchio, e descrivere fuori del cerchio, tutte le figure di molti lati, come sono il triangolo, il quadrato, il pentagono, l'exagono, ed il quindecagono, ma non quelle figure, che s' interpongono fra l' exagono, ed il quindecagono; e con ciò conoscete i limiti del possibile, e del non possibile. Nelli quattro primi Libri dunque Euclide v'insegna considerar le superficie colla semplice relazione di maggiori, minori, o d' uguali fra esse; e v' insegna formar l' idea complessa di quello, che si può fare nelle superficie intorno all' uguale, al più, o al meno considerato nelle figure piane. Di poi Euclide alza la vostra mente ad uno più sottile modo di considerar le proprietà della quantità, ch' è la proporzione, e fà passaggio al V. Libro, nel quale v'insegna formare idea generale della proporzione, che vale a dire, della relazione, ch'è fra le quantità; v'insegna ne i modi d'argomentare a trasmutare i termini delle proporzioni, e con ciò a venire in cognizione di quelle proporzioni fra le quantità, che prima erano oscure alla vostra mente. V' insegna poi a conoscere non solo la proporzione di equalità, ma la maggiore, e minore proporzione, ed a paragonare proporzione con proporzione, come si vede nelle proposizioni VII., VIII., e IX; e v' insegna moltiplicare le proporzioni fino all' infinito, come si vede nelle seguenti proposizioni; e v'insegna, come vi hò detto poc' anzi, a venire in cognizione delle proporzioni per lo mezzo de' i modi d'argomentare, cioè trasmutando, convertendo, e dividendo i termini delle proporzioni. Insegnato poi, che vi hà Euclide le proprietà generali della proporzione, usa il suo utilissimo stile di discendere da i generali alli particolari, e dalla teorica, alla pratica; ed applicando nel VI. Libro la proporzione alle figure, vi appresta l'aggio di formare nel Sesto Libro trè idee complesse, nelle quali tutta la Geometria piana si comprende, e sono le seguenti. Nelle prime otto proposizioni del Sesto vi

fà conoscere, che ne' triangoli avete in proporzione quello stesso, che nelle prime otto proposizioni del primo Libro avete solamente in uguaglianza; dond' è che sempre, che avete tre cose note in proporzione, ritrovate le altre trè per lo mezzo della proporzione, come nel Primo avete trovate le altre tre considerando la uguaglianza: e questa è la prima idea complessa. Da questi triangoli poi in proporzione considerati, egli v' insegna, nelle seguenti sue proposizioni, a prender terze, e quarte proporzionali, ed una mezza proporzionale fra due linee rette date: dal che ne avviene, che voi possiate fare, per lo mezzo della proporzione, coll' invenzione di una sola mezza, o di una terza proporzionale, tutto quello, ch' egli vi ha insegnato fare, intorno alla quantità, negli antecedenti Libri; imperciocchè, essendo generalmente i quadrati, li paralleligrammi, e li triangoli fatti sù la prima, e la seconda, come la prima alla terza linea proporzionale, prendendo mezze, a terze proporzionali, voi fate le sopradette figure in qualsivoglia data proporzione, e le riducete all'uguaglianza di qualunque triangolo, di qualunque quadrato, o di qualunque parallelogrammo; e per lo mezzo delle linee reciproche, potrete ancora fare, prendendo mezze, e terze proporzionali, paralleligrammi uguali frà loro; ed ecco la seconda idea complessa. La terza idea complessa poi è la seguente cioè, Euclide v'insegna nel VI. Libro, che se una serie di radici sono in proporzione fra esse, i quadrati, i cubi, e tutte le altre potenze superiori, le quali nascono dalle radici moltiplicate in se stesse prima, e poi quelle, che nascono dalle potenze prodotte, moltiplicate per le radici, come sono i cubi, i biquadrati &c., sono ancora proporzionali fra esse. In questa guisa voi avete di tutti li sei Libri d' Euclide quattro idee complesse. La prima cioè, che se considerando i triangoli, o in quantità semplice, o in proporzione, voi avete tre cose note, avete

note

note le altre ancora, e perciò noti li triangoli. La seconda, che per la via delle parallele, e per quella delle trasmutazioni delle figure, e per quella della descrizione del cerchio, voi potete prendere angoli uguali ad altri angoli dati, e far paralleligrammi uguali a qualsivoglia dato quadrato: e per la via della iscrizione, e descrizione del cerchio, voi potete inscrivere nel cerchio, e descrivere fuori del cerchio qualunque figura piana, fuorche quelle, che si comprendono fra l'exagono, ed il quindecagono; e ciò a cagione della quadratura del cerchio, che a noi manca. La terza, che per la via di prendere una mezza proporzionale potete fare figure piane, cioè triangoli quadrati, e paralleligrammi in qualsivoglia proporzione fra esse, ed uguali fra esse. La quarta, che se avete le radici note in proporzione, potete conoscere la proporzione di tutte le potenze superiori prodotte dalla moltiplicazione delle radici in se stesse; e che se avete note le terze, quarte, &c. proporzionali, avete note le radici, che sono in subduplicata, subtriplicata ragione, &c. delle loro potenze. Alla perfine nel corso di tutti li sei primi Libri, la mente umana forma tante diverse idee, quante sono le proprietà, che in ogni proposizione Euclide c'insegna; ma poscia, a cagion dell'unità, che Euclide siegue nel suo ammirabile ordine, la mente forma sempre idee complesse, e le particolari proprietà, che ha contemplate, le unisce in una, fino a tanto, che nel VI. Libro, per lo mezzo solamente dell'arte di prendere una mezza, o una terza proporzionale, fà nella quantità poco men che tutto quello, che negli antecedenti sei Libri hà insegnato fare; e riduce, come vi hò detto, a quattro sole idee complesse i limiti della Geometria piana. Li tre seguenti Libri poi de' numeri, e l' XI. e XII. de' solidi sembrano esser corollarij de' sei primi; perchè il VII, VIII, e IX, altra cosa non sono, che la proporzione applicata a' numeri, e l' arte di esprimere sensibilmente co' i numeri quello

stesso,

stesso, che nel Sesto si fà con le linee, e con le figure piane, come a cagion d' esempio, la regola avrea, volgarmente detta del tre, altra cosa non è, che la XVI proposizione del Sesto di Euclide: e l' XI, e XII Libro, altra cosa non sono, che fare sopra i corpi di tre misure quello, che nel Sesto si fa nelle superficie: con questa differenza però, che non si può fare intorno a i corpi quello stesso, che si fa intorno alle superficie, a sola cagione, che per far superficie in qualsivoglia proporzione, basta una mezza proporzionale; ed all' incontro per far corpi in qualsivoglia proporzione, se ne richieggono due; che è quello appunto, ch' io hò ritrovato, e che ave svegliato non lieve tumulto nella schiera de' matematici. Ecco dunque, che guidando Euclide per tutti li novi primi Libri, e per tutto l' XI, e XII, sempre la vostra mente nella considerazione della proporzione, vi fa formare un' idea complessa di tutto quello, che si può fare intorno alle superficie, e intorno a i corpi di tre misure; e del modo come si possono esprimere in numeri le proprietà, che ha ritrovate intorno alle superficie, e intorno a i corpi. Ma nel X. Libro è, dove Euclide alza la vostra mente a contemplare coll' ultima astrazione, della quale è capace la mente umana, la quantità: Imperocchè nel X. Libro si considerano le proprietà della quantità, considerate nelle quantità commensurabili, e incommensurabili, che vale a dire, le radici note, o ignote, dalle quali nascono le quantità; e nelle quantità ignote usa ancora la proporzione, che hà insegnata nel Quinto, per modo che la mente ragiona intorno a quelle quantità, che non conosce, considerando frà quelle la proporzione, e il più, e il meno, come appunto avviene di quel, che fa intorno alle radici sorde, e intorno a quelle quantità, che sono commensurabili, o incommensurabili, così in radice, come in potenza: ond' è, che quantunque in quello la mente contempli un' oggetto molto più astratto, che non sono

i piani, i numeri, ed i solidi; le leggi generali però della proporzione, sono le istesse. Ecco dunque Filotimo, come si fanno le idee complesse, le quali riducono ad una sola idea le molte particolari idee, che delle proprietà a parte a parte avete fatte. Queste poi vi fanno vedere in compreso la potenza, e i limiti della Geometria; e queste altresì vi rendono facile l'uso di quella: perche vedendo voi in compreso, e in una sola occhiata, tutta la sua distesa, e i suoi limiti; nell'occasione di una quistione proposta vi volgete, con ammirabile facilità, a quei particolari, che vi bisognano per risolvere la quistione. Ma quello, che più importa, Filotimo, è, che accostumata in questa guisa la vostra mente, a far nell' oggetto della quantità le giuste idee, prima de' particolari, e poi, per lo mezzo delle idee complesse, a rimirare in uno, e con uno solo sguardo tutta la distesa di una scienza, voi potete far lo medesimo sopra ogni scienza, e sopra ogni argomento morale, o da sensi dipendente, sopra il quale vi ponete a meditare. Questo appunto posso dirvi ingenuamente essere avvenuto a me, il quale la Vita Civile, e la Meccanica ho fatte, senza che prima avessi letti molti libri; ma le hò fatte solamente per lo mezzo di formar la giusta idea dell' essenza di queste scienze; laonde poi mi è stato facilissimo, dopo definita la natura delle sopradette scienze, spiegar tutti li particolari, che sono conseguenze dell' idea generale della scienza, dalla quale idea generale la giusta definizione di quella si deduce. E qui vedete, Filotimo, quanto la nostra anima cerchi di ridurre sempre ogni cosa all'unità, in tutte le operazioni, ch'ella fa intorno al corpo, nel qual risiede; e quanto utile sia alla mente umana, saper bene usar l'unità.

Fil. Utilissima cosa in vero intendo esser la conoscenza, e l'uso dell'unità: quello però, che avete detto, giustifica Euclide in ciò, che riguarda l' arte delle sue proposizioni, ed anco in parte in ciò, che si attiene alla soluzio-

zione de' problemi: Imperciocche riducendosi ad una, o a poche idee compleſſe, le tante, e diverſe proprietà, ch' Euclide c'inſegna; quelle, che ſervono all' uſo della ſoluzione de' problemi, rimangon poche, laonde ſempre ſono alla mente preſenti: ma la difficultà di poter ritrovare il luogo per poter coſtruire un problema propoſto, non ſi toglie affatto colle idee compleſſe, che delle proprietà di Euclide voi fate: imperciocche, dovendoſi in Geometria coſtruire per ritrovare le ignote, queſte ſempre tentone, e ſenza ordinato metodo, ſete coſtretto di cercare; ond' è, che più per fortuna, che per ſcienza avvien, che ſi ritrovino, appunto come dicono gli ſignori algebriſti.

Dor. E' veriſſimo, Filotimo, che v' è d'uopo, nel metodo ſintetico, dell' induſtria per ricercar le ignote; ma è vero altresì, ch' Euclide vi apre un vaſtiſſimo campo per ritrovarle; che ſia così. Oſſervate, che in Geometria, ſe voi ſapete ben dividere, in una quiſtione propoſta, i dati, da quel che vi manca, voi ritrovate ſempre, che quelche vi manca, ſono coſe, che ritrovando uno, o più angoli, o ritrovando uno, o due lati, vi verrà noto tutto quello, che ſarà valevole a ſchiararvi tutto il problema; ond' è, che ſe voi avete ben formate della potenza, e de i limiti della Geometria, quelle idee compleſſe, che io vi hò dette, faciliſſimamente ritroverete le ignote. Ed in vero Euclide vi dà nelle parallele, e nelle proprietà de' triangoli, e in quelle de' cerchi, tanta copia di proprietà, che deſcrivendo voi una linea, o un cerchio, com' egli vi permette ne' poſtolati; voi ritroverete ſempre, ne' triangoli, e nelle altre figure piane, angoli, e lati; in modo che a voi verrà facile il ritrovar le ignote nella quiſtione: oltr' a ciò prendendo per lo mezzo del cerchio una mezza proporzionale ſolamente, voi potete ſpeſſe volte ritrovar le ignote, che vi biſognano, e conſtruire in quantità, o in proporzione i problemi propoſti, ſe avvenga, che ſiano ſolu-

bili. L'industria poi, ch'è necessaria per ritrovare le sopradette ignote, è alla mente umana utilissima; imperocche frà le altre qualità, che deve aver la nostra mente, è quella di essere industriosa; dalla qual cosa ne avviene, che non si può questa sì fatta industria acquistare, senza continuato esercizio: e se Euclide ci avesse dato un modo pratico, ed a tutti comune, per ritrovar le ignote, avrebbe privata la nostra mente del gran privilegio di divenire, non solo chiara, diritta, ampia, ma industriosa, ciò che è, come hò detto, una proprietà essenziale alla mente umana. Rammentatevi Filotimo, la similitudine del cocchio, e vedrete, che solo nostro è quello, che a forza del nostro discorso ritroviamo: Ed in vero, ogni pratico calculatore aritmetico per l'arte, che da Euclide si deduce, ritrova le ignote, che le bisognano; ma quei suoi ritrovati son figli dell'arte, non della sua propria scienza, ond'è, ch'ogni pratico calculatore opera senza saper quelche fà; e perciò Euclide vuole bensì, che la pratica non si disgiunga dalla scienza, ma vuole ancora, che la pratica dalla scienza dipenda, non dalla via generale, e pratica a tutti comune, la quale poi fà, che gli huomini di mente pocomen, che stupida, pajano eguali, in quelle sì fatte arti, agli più ingegnosi, e sapienti, come si è nella pratica del calculo analitico più volte osservato.

Fil. Oh, che dite Signor Doria! gl'analitici si contentano di risolvere i problemi per lo mezzo del calculo, essendo quello, a lor dire, una via generale, più agevole, e più facile della Geometria sintetica, e con ciò dimostrano tutto quello, che fanno, e ne fanno la ragione.

Dor. Non più per adesso di questo, perchè, fatto che avete l'idea del metodo sintetico, vedrete la fallacia di questo loro argomento. Proseguite in tanto a narrar quello, che dicono i moderni.

Fil. La necessità, che vi è dell'industria, e della pratica,

per

per sciogliere un problema, è appunto il gravissimo difetto, del quale i moderni matematici accusano il metodo sintetico; perche dicono essi, che la parte nobile, e sublime della Geometria è quella, che riguarda il discorso; ond'è, che in Geometria basta intender l'idea in generale del raziocinio, basta intender la proprietà delle cose; nel rimanente poi dicono, che niente importa, ch'il geometra non sappia sciogliere un problema, e che non possa costruire una proprietà, che intende: E in vero a me sembra, che l'idea, che vostra mercè hò fatta della Geometria, mi basti per essere un perfetto geometra, ma che 'l discendere poi a i particolari, per lo mezzo della soluzione de' problemi, sia tanto superfluo, quanto penoso.

Dor. Bisognerebbe, Filotimo, che voi aveste la natura di Dio, e non di huomo per potervi dispensare dalla necessità della pratica, per formar la vostra mente sovra la sola intelligenza astratta delle cose.

Fil. Oh! questo mi giunge nuovo.

Dor. E pure è verissimo.

Fil. E come?

Dor. Iddio solo è quello, nel quale il conoscere, e l'operare sono una medesima cosa; l'huomo all'incontro non giunge mai a poter eseguir quello, che intende, se non forma gl'abiti in conseguenza delle conoscenze, ch'ave acquistate; per esempio. Un cristiano non sarà mai buon cristiano col solo intendere i precetti del decalogo, se non forma gl'abiti in conseguenza di quelli: questo è il famoso. *Video bona proboque, deteriora sequor*. Filotimo, gl'huomini operano più in conseguenza degl'abiti, che delle conoscenze, e quando operano in conseguenza degl'abiti naturali, sono simili a i bruti: all'incontro quando formano gl'abiti in conseguenza delle conoscenze del vero, divengono a Dio simili; e quando formano gl'abiti in conseguenza delle virtuose massime a loro insegnate da' virtuosi magistrati, divengono onesti cittadini.

Fil. Voi

Fil. Voi bel bello siete entrato nella Morale; ma questo che ha che fare colla Geometria?

Dor. Moltissimo, perche, siccome hò detto, il discorso geometrico è applicabile a tutti li particolari; ma voi, Filotimo, credevate, mercè l'idea, che avevate fatta della Geometria, di aver acquistata la facultà di distinguere con sicurezza il vero dal falso, e pure non avete altro acquistato, che la facultà di emendarvi ne' vostri errori, e non quella di non errare, la quale non potete mai conseguire in Geometria, se non molte volte errando, ed emendandovi; nè questo, per altro mezzo, si fà, che per quello di un lungo, e ben ordinato esercizio. Sicche Filotimo, bisogna bene intendere, ed operare in conseguenza di quel, che s' intende; la qual cosa non si fà senza unire alla teorica la pratica; ma pratica, che dalla vera scienza dipenda, e questa è la verità; e tutte le altre cose, che si dicono, son merre ciancie, inventate per liberarsi dal travaglio, che la vera scienza, e la virtù addimandano.

Fil. Piano, piano, Signor Doria, che i moderni non escludono in tutto l'esercizio dell'uso della Geometria, ma vogliono, che questo si facci per la via analitica, cioè per l'Algebra, come una via più generale, più ordinata, e più comoda. E di più dicono, che l'Algebra è l' arte d' inventar le scienze; e che l' invenzione dalla Geometria sintetica non si può dedurre.

Dor. Oh, Filotimo! voi volete sempre indrizzare il vostro discorso a quest' Algebra, e con ciò entrare in un vasto oceano. Questa appunto è quell' Algebra, che a mio credere, ha deformata la Geometria: Questa non è l' arte d' inventar le scienze, siccome dicono i moderni; ma è l'arte di trovare molte inutili proprietà; dico inutili, perche mai si riducono a' veri particolari, ed alla pratica: e poi, quei si fatti particolari nascono dal calculo, non dal discorso. Ma sapete qual è la vera arte d'inventar le scienze?

Fil. Quale?

Dor. Quel-

Dor. Quella, che io vi hò insegnata cioè; di fare, per lo mezzo delle reminiscenze, un serio esame sovra quello, che la vostra mente ha fatto, quando ha ritrovate le verità; e da questo sì fatto esame formar l'idea del modo, col quale devonsi ritrovare le altre verità: così poi, esaminando una scienza, formar una idea complessa di tutta quella scienza, la quale idea vi fà vedere in una sola occhiata la natura, e i limiti di quella scienza; in questa guisa sarà a voi agevole di ben definirla, ed indi a quei particolari discendendo, che sono conseguenze, ovver corollarj dell'idea universale di quella tale scienza, voi tutti li vedete nella lor vera natura. Alla perfine, Filotimo, l'unione della Geometria sintetica, colla Metafisica, è la vera arte d'inventar le scienze, e non il pratico calculo degl' algebristi, che vi conduce ciecamente a ricercare inutili proprietà.

Fil. Adunque, se io formo in Geometria quella buona pratica, che voi dite, diverrò inventore? perche l'idea della scienza l'hò già, vostra mercè, formata.

Dor. Oh: per essere inventore, si richiede ancora un' altra cosa.

Fil. E qual' è questa?

Dor. Si richiede l'estro, del quale i matematici non hanno men bisogno, che i poeti; perche la mente degl' inventori non solo dev' esser chiara e forte, ma viva, e penetrante, per modo che, alzandosi sopra se stessa, penetri nelle più intime proprietà delle cose; e quelle rivolgendo in mille guise, infinite altre proprietà ne deduca. In fine negl'inventori, la piena conoscenza della scienza, sopra la quale meditano, l'uso, e la pratica nell'operare, sono gli stromenti a loro necessarj: ma un fuoco della mente, che la sollevi sopra se stessa, in modo tale, che, a guisa di raggio, penetri nelle più intime parti delle scienze, ed in quelle vegga proprietà al comun senso ignote, è quel pregio, che è necessario agl' inventori. E quindi è, che questa sì fatta gente destinata all' invenzione, prima è chiamata dalla

dalla natura a questa tal opera, e poi collo studio, e coll' esercizio si rende più abile. Quelli poi, che all'invenzione non sono dalla natura chiamati, ancora hanno il lor grado frà matematici; imperciocche formano la schiera de' critici, i quali sono ancora utili agl'inventori, perche vagliono ad emendarli di quelli errori, ne' quali sovente inciampano, a cagion de' voli disordinati, verso i quali l'estro troppo infocato gli rapisce; dond'è poi, che invaghiti delle proprie invenzioni, trascurando la facultà di emendarsi, o di quella mancando, nell'errore rimangonsi. Questi sì fatti critici sono utili a' matematici, e per possedere questo grado di critico altro non si richiede, che aver sortito dalla natura una mente esatta, attenta, e quanto basta capace per acquistare quella facultà, di distinguere con sicurezza, ne i particolari almeno, il vero dal falso, la quale si acquista, accostumando la mente a meditare sopra la natura, e l'essenza dell' unità del discorso, che nella dimostrazione geometrica si contiene. Ma questi sì fatti critici divengono poi perniciosi, ed importuni, quando, mancanti della sufficienza di distinguere il vero dal falso, mossi dall'invidia, come sovente avviene, vogliono prendere per le ali gl'inventori, ed arrestarli ne' loro voli; dalla qual cosa poi ne avviene, che l'ignoranza, non mai potendosi col buon costume accordare, da' critici infelici fanno alla malizia, ed all' impostura passaggio. Questi sono, Filotimo, i velenosi fonti, da' quali sono scaturite tante avversità, e miserie, che hanno tutti gl'inventori afflitti, e tormentati.

Fil. Voi avete mirabilmente distinte ne' loro ordini, le menti de' geometri: ed in vero non può negarsi, che la maledetta malizia non sia il suffragio, al quale ricorrono i deboli, e gl'ignoranti. Ma ritorniamo al nostro proposito, e ditemi: perche i metodi, che praticano i moderni, sono dannosi alla mente umana?

Dor.

Dor. Io voglio sopra questo punto soddisfarvi; ma per ciò fare è necessario, ch' io ponghi un poco avanti agli occhi vostri, come specchio di riflessione, i pregi del metodo sintetico; acciò questo con quei de' moderni paragonando, possiate vedere i difetti, ed i manifesti errori, che in quelli si contengono: Ma prima voglio spiegarvi brievemente le proprietà, che deve avere la mente umana, e farvi vedere, che tutte si acquistano coll'uso ben fatto del metodo sintetico: di poi, narrandovi l' idea dell' Analitica, vi farò vedere, ch' ella non è valevole ad arrecare alla mente quei pregi, che la possono render perfetta; e passando all' idea de' nuovi metodi, vi farò conoscere, che non solo sono perniciosi, come l'Algebra, alla mente umana, ma che son falsi, e vani.

Fil. Voi riempite la mia mente di sapienza, ed il mio animo di curiosità tutto ad un tempo. Svelatemi di grazia le qualità, che deve avere la mente umana? perchè io diverrò, in sì fatta guisa, matematico, e metafisico nel medesimo tempo, mentre intenderò l' essenza, e la proprietà della mente umana.

Dor. La mente umana, è necessario, che sia, per primo lucida, per veder con chiarezaa le cose, che prende a contemplare. Per secondo esatta, acciò possa vedere minutamente tutte le parti, delle quali si compongono le materie, che vuole esaminare. Per terzo ordinata, per poter ben distinguere nelle sue parti le cose, sopra delle quali medita, e per potere perfettamente ordinare i discorsi. Per quarto forte, acciò in una lunga catena d'illazioni possa, quando è giunta all' ultima, aver presenti tutte le antecedenti, in modo che possa conoscere quella unità, nella quale il raziocinio consiste, e concludere il discorso. Per quinto, che sia ampia, e molte cose comprendente, acciò possa le molte idee, che ha formate, ridurre in una; e formando quelle idee complesse, che vi hò additate, vedere in una sola occhiata, tutta la distesa, e i

limiti di una scienza; ed altresì di un affare, quando avvenga, che alle pratiche cose si rivolga. Per sesto, che sia industriosa, per sapersi procurare nelle difficili quistioni quelle conoscenze, che a lei mancano, e che a lei devono servire per base de' suoi discorsi. E per ultimo, dev' esser viva, e penetrante, acciò possa, profondandosi nelle intime proprietà delle cose, che esamina, vedere in quelle, quasi per raggio di luce, quelle cose, che sono nascoste alle menti deboli, a tarde. In fine quella mente sarà dalla natura privilegiata, la quale, oltre le da me narrate qualità, avrà quel fortunato estro, che l'invenzione produce. Ora Filotimo, con queste sì fatte qualità, che, come doti della mente umana, vi hò descritte, voi vedete esser necessario, che la natura unisca molte cose fra loro contrarie, ed opposte, per formare una mente perfetta: Imperciocchè sendo necessario, che la fantasia, e la memoria servano alla mente per ministri nell' officio de' suoi discorsi, è necessario altresì, che quelle sì fatte potenze sian forti; perche, per esempio, quando voi esaminate un teorema geometrico, che di una lunga catena d'illazioni si compone, la memoria serve a far sì, che la mente si rammenti le antecedenti illazioni, quando è giunta all'ultima; e la fantasia vale a far sì, che la mente abbia sempre presenti in una lunga catena d'illazioni, anco le immagini delle proprietà, che astrattamente contempla; e la forza del discorso è necessaria per far sì, che la chiarezza della mente non si lasci confondere dalle immagini, per modo che non possa tessere i suoi sillogismi, e concludere un discorso, che da una lunga serie d'illazioni dipende; dond' è, che sia necessario, che la mente sia viva nell' immaginare, esatta nel raccordarsi, ed ordinata nel ragionare: In somma è d' uopo, che sia esatta, minuta, ordinata, e forte tutta ad un tempo. La qualità poi di vivace, e penetrante, si oppone più che verun' altra, all' esattezza, ed a quella di contem-

templar minutamente le cose: imperciocchè il fuoco, che produce la vivacità, stimola la mente a volare, ed a trasandare il minuto; ond'è, che di leggieri queste sì fatte menti inciampano negli errori, li quali poi emendano, raffreddato che sia il calore dell'estro; quando però avvenga, che per lo mezzo del lungo studio abbiano acquistata quella sufficienza a distinguere il vero dal falso, che vi hò descritta. Le menti tarde, all' incontro, sono tanto più atte alla contemplazione delle minute cose, quanto sono in tutto impotenti all' invenzione, ed alla creazione; e queste son quelle, che, come vi hò detto, vanno, come incapaci d' ingolfarsi nel mare vasto, ed aperto, radendo il lido, e contemplando ogni particolare: Laonde se avviene, che abbiano acquistata la sufficienza di distinguere almeno ne' particolari il vero dal falso, vagliono nella critica; e se questa sì fatta sufficienza non hanno, non meritano il nome di matematici, nè che noi di quelli facciam parola. Quelle, che vi hò narrate, sono le proprietà, che deve avere la mente umana; in conseguenza delle quali vi farò conoscere Filotimo, che solamente l'esercizio sopra la Geometrica sintetica fatto, è quello, ch' è valevole ad esercitare, ed a perfezionare nella mente umana le da noi accennate proprietà, quando avvenga, che Iddio abbia queste sì fatte qualità, a qualche privilegiato huomo somministrate.

Fil. Voi mi fate tutto rientrar nel mio niente, Signor Doria, e conosco quanto la mia mente sia lungi da queste perfezioni, che voi domandate: ma mi consolo altresì, considerando, che niuna, o molte poche saranno quelle menti, che tutte queste grandi perfezioni, che voi in esse richiedete, posseggono. Quel che voi domandate è una perfetta armonia, che da' contrarj si forma, ed è poco men, che impossibile.

Dor. E qual credete voi Filotimo, esser la cagione, per la quale sempre pochi siano stati nel Mondo i veri sapienti?

ri? Certamente non altra, che le molte qualità, che si richieggono per formare una mente perfetta. I Greci, i Latini, e tutti li più vasti Imperj, se ben considerate, molti pochi huomini posson vantare, i quali si siano all' ultima perfezione avvicinati; e pure quelli soli formano la gloria, e lo splendore di quelli Imperj.

Fil. In vero avete ragione; però le menti mediocri, se non hanno i pregi della perfezione, sono più fortunate, che le grandi, perche si fan forti col numero, al quale l' ignorante vulgo aderisce: ma non ci dilunghiamo troppo dal nostro proposito, ed insegnatemi, come l' uso della Geometria sintetica possa somministrare alla mente umana la perfezione di quelle qualità, che avete narrate?

Dor. Ve lo dimostrerò con evidenza, purche vogliate rammentarvi quello, che abbiamo detto, e che la mente umana fà, quando sopra l' oggetto della Geometria ragiona.

Fil. Dite di grazia? perche io mi rammento perfettamente tutti i vostri ragionamenti.

Dor. La dimostrazione sintetica Filotimo, fà acquistare alla mente umana la chiarezza, l' esattezza, ed il buon ordine nel ragionare; perche, se ben vi rammentate quello, ch' io vi hò detto, vedete altro non essere una dimostrazione geometrica, se non l' arte di schiarare un'idea, che prima era oscura, e confusa; a cagion d'esempio. Non può la mente conoscere con idea chiara, e distinta, che trè angoli d'un triangolo sono eguali a due retti: Ma in virtù dell' industria, colla quale tira una parallela ad un de' lati del triangolo, e prolunga un altro lato, distingue il valore degli angoli a parte a parte; e per lo mezzo della dimostrazione forma idea chiara, e distinta dell' accennata proprietà. Così dunque i mezzi, per i quali a questo utilissimo fine si perviene, sono l' esattezza nel divider le parti del teorema, in modo che si possino ordinare le illazioni, sicche l' una dall' altra dipenda, e formino

quell'

quell' unità di discorso, nel quale il vero consiste: ed ecco, come la dimostrazione geometrica somministra alla mente umana la chiarezza, l' esattezza, e l' ordine del ragionare. La Geometria sintetica somministra ancora l' industria: imperciocchè nella soluzione di un problema proposto, la mente ha necessità di ricercare industriosamente le cose a lei ignote, e formare la costruzione in quella guisa, che v' hà mostrato avvenire nella XXXII. proposizione del primo Libro. In tutte queste sì fatte cose si esercita ancora la forza della mente, a cagion ch' ella ha bisogno, come vi hò detto, della forza, per andar diritta nel corso di una lunga serie di sillogismi, tutti l' uno dall' altro dedotti, a fine di formare la dimostrazione. Alla persine sapete, com' è la mente quando ragiona intorno le materie geometriche? ella è a guisa di un huomo, il quale cammina sopra una sottilissima corda, per la quale cosa fare, hà di mestieri di esser ben forte di vita, ed ordinato nel suo cammino per non vacillare, e cadere a terra; perchè, in Geometria non si cade per metà, ma o si cammina diritto, o si precipita in tutto. S' amplia poi, e si dilata la capacità della mente, nell' esercizio della Geometria sintetica, quando si fanno quelle idee complesse, ch' io vi hò insegnato fare, per mezzo delle quali voi vedete, in una sola idea, tutta la distesa, ed i limiti della Geometria; ond' è poi, che voi fate a guisa di un perfetto ingegniere di guerra, il quale avvicinandosi ad una piazza, prima contempla ad una ad una le parti, che la compongono; di poi salito sopra l' alto di qualche monte la mira tutta in compreso, indi ritornando al piano, vede tutti quelli particolari con idea diversa da quella, colla quale prima li aveva mirati, e ciò perche, dopo averli veduti in compreso, conosce la relazione, che hanno fra di loro, e l'ordine, e l'arte, e l'industria, colla quale sono stati dall' artefice formati. La qualità poi di vivace della mente, la quale, come vi hò

detto, l' estro produce, ancora si esercita nella Geometria sintetica, quando avviene, che alcuno l' abbia sortita dalla natura; perche porgendo la quantità un vasto campo di materie, sopra le quali possa la mente pensare, considerando ella l' essenza, e i limiti di qualunque scienza, può veder quello, di che quella scienza manca, e perfezionarlo, e penetrare nelle intime, ed ascose proprietà delle cose, dalle quali poi ella possa nuove invenzioni dedurre. Oltr' a ciò, nella Geometria sintetica divien la mente chiara, ed esatta, in virtù del perfetto ordine, che nel dimostrare è sempre costretta a seguire; in quella si amplia la capacità della mente, e si diviene ancora inventore, quando avviene, che alcuno sia dalla natura a tal opera destinato. In Geometria poi s' acquista ancora la facultà morale della conoscenza della mente, e di se medesimo: perche l' esperienza facendo conoscere, che non si giunge quasi che mai a scoprire una verità, se prima non s' è errato molte, e molte volte, la mente riman persuasa della sua debolezza, e della facilità di spesso inciampare in errore; e conoscendo, che per molte che siano le verità, che discopre, sempre ne rimangono altre infinite da discoprire, forma un idea onesta, e non temeraria dell' umana sapienza. Alla perfine Filotimo, la Geometria sintetica è a guisa di una viva sorgente d' acqua; perche siccome da questa ogn'uno può prenderne quella quantità, ch' è proporzionata alle forze del suo stomaco, così coll' uso di quella può perfezionare, quelle qualità di mente, all'acquisto delle quali la natura l'hà formato capace. Conoscerete ben voi stesso queste verità, Filotimo, se dopo che avete preso da me l'idea generale della Geometria, e con essa quella del vero, e del falso, ritornerete la seconda volta a studiar gli elementi, perche allora farete di quelli un idea così piena, come voi stesso ne foste inventore, ma bisogna dar bando all' Algebra, ed a i nuovi metodi.

Fil. Voi volete distruggere le cose più ricevute, l' Algebra

bra, ed i nuovi metodi impugnando.

Dor. Facciamo da buoni metafisici, in quella guisa, che abbiam fatto della Geometria sintetica, prima l' idea dell' Algebra, e poi de' nuovi metodi; e vi farò chiaramente conoscere, che la prima è perniciosa, e mancante; ed i secondi non solo perniciosi, ma falsi.

Fil. Ditemi di grazia: quale dunque è l' idea, che dell' Algebra dobbiam fare?

Dor. Io nella mia mente distinguo l'idea del discorso analitico, dal calculo analitico, e reputo il primo men naturale, che 'l discorso sintetico, ed il secondo pernicioso.

Fil. Veniamo ora alle pruove. Spiegatemi l' idea, che dobbiamo avere del raziocinio analitico?

Dor. Gli analitici, in vece di procedere ne' loro discorsi dalle cose note alle ignote, come fanno gli sintetici, suppongono la cosa, come fosse fatta, cioè a dire, come se il problema fosse già sciolto. In virtù di questa ipotesi poi considerano le proprietà, che avrebbe il problema, se fosse sciolto; ed in questa guisa, deducendo sempre da una condizione, che ritrovano che doverebbe avere, l' altra ch' è conseguenza di quella, concludono, quelle essere le proprietà, che deve avere, acciò siano adempite tutte le condizioni domandate nel problema; ed in questa guisa, fanno la costruzione, in conseguenza delle proprietà del problema, che hanno trovato, in virtù della falsa ipotesi, che han posta. Alla perfine il metodo analitico è il metodo inverso del sintetico: imperciocchè nel sintetico la mente, passando dalle cose note alle ignote, prima forma la costruzione, di poi la dimostrazione, indi la conclusione. Nell' analitico si pone prima l'ipotesi, supponendosi già fatto il problema, e dalla supposizione si ricava l'equazione, e dall' equazione il loco del problema, e la costruzione. Questa è Filotimo, la generale idea del raziocinio analitico.

Fil. Ma, a dirvi il vero, questo metodo mi sembra ingegno-

gnosissimo, e meno intricato del sintetico, perche nel sintetico voi avete d' andar brancolando di quà, e di là per ritrovar le ignote: in vece che, in questo metodo analitico, con un solo metodo di raziocinare, ed a tutti comune, voi ritrovate il luogo del problema. Oltr' a ciò, questo metodo analitico nè meno si oppone al sintetico: imperciocchè in quello si suppone, che si sappia la Geometrica sintetica; mentre, quando voi supponete fatto il problema, avete da sapere le proprietà, che deve avere; le quali non potete conoscere senza sapere la Geometria sintetica, perche quelle proprietà, che si cercano, sono le stesse, che Euclide ci ha insegnate.

Dor. Verissimo, Filotimo, ed io non niego, che'l raziocinio analitico ingegnosissimo non sia; ma dico, ch' egli non è così utile, come il sintetico, alla mente umana, a cagion che non è tanto conforme al naturale raziocinio, quanto lo è il sintetico; perche i bambini non cominciano i loro raziocinj dal supporre la cosa fatta, ma procedono sempre dalle cose note alle ignote, come in questo nostro ragionamento vi hò detto: Così, seguendo il raziocinio analitico, non si esercita Filotimo, il naturale discorso, ma si esercita un raziocinio vero solamente a cagione, che son vere le proprietà geometriche, che si suppongono.

Fil. L' idea, che mi avete data del metodo analitico è giustissima. Ditemi ora un poco? come dal raziocinio analitico ne deducono il calculo; e perche cotesto calculo è cotanto perniciosо, come voi dite

Dor. Gli analitici supponendo, come vi hò già detto, la cosa fatta, hanno ritrovato l'arte ingegnosissima di denominare con le lettere le quantità, che la Geometria denomina con linee, superficie, e corpi. Questa sì fatta arte fa sì, che le quantità di diversa specie si denominino con un segno a tutti comune, cioè, con le lettere; in questa guisa vengono ad astraere dalla quantità, l'umana mente, assai più, che Euclide non l'astrae:

imper-

imperciocche la disegnano con segni piu generali, ed apprestano meno ajuto all' immaginazione, che le linee, le superficie, ed i corpi. Quest'arte di additare con un medesimo genere di segni, cioè con lettere, le quantità di diversa specie, fa sì, che gli analitici possano fare sopra le lettere tutte quelle operazioni, che l' Aritmetica c' insegna fare ne i numeri, e ridurre all' ugualità le quantità diverse; perche in questa guisa tanto le lettere, quanto i numeri hanno la facultà di designare tutte le diverse specie di quantità. Per esempio, come voi sapete, nell'Aritmetica si segna col numero 4 il quadrato di 2, e col numero 8, il cubo di 2; ed in questa guisa il quadrato, ed il cubo, quantunque di diversa specie, sono segnati co i numeri. Dell' istesso modo nell' Algebra speciosa, il quadrato di A si segna A^2, il cubo, A^3; laonde col medesimo genere di lettere, come nell'Aritmetica, si segnano li stessi numeri; con questa differenza però fra l' Algebra speciosa, e l' Aritmetica, che l' Algebra speciosa distingue le diverse potenze, aggiungendo alle lettere il segno, che addita le potenze; cioè 2 quadrato, 3 cubo &c. In vece che nell'Aritmetica, 4 è quadrato di 2, 8 è cubo, &c.; ma con tutto ciò le lettere nell' Algebra segnano indifferentemente tutte le diverse potenze delle quantità, ond' è, che le lettere si possano a calculo, come i numeri, ridurre, ciò che si noma l' Algoritmo: ed ecco, Filotimo, la Geometria ridotta a calculo, come l' Aritmetica, siccome voi medesimo non ignorate, avendo, per quelche m' avete detto, qualche cosa studiato intorno all' Algebra.

Fil. Ma spiegatemi ora un poco, come lo esprimere con generali segni le quantità, ed il ridurre a calculo per mezzo di essi la Geometria, sia cagione, che i problemi geometrici si risolvano per calculo in quella guisa, che nella Geometria sintetica, si risolvono per raziocinio dedotto dalle cose note all' ignote?

Dor. Voi sapete, che quando agl'analitici si appresenta la

 solu-

soluzione di un problema, essi fanno le seguenti quattro operazioni cioè: denominazione, equazione, riduzione, e costruzione, e poscia la sintesi, o sia la costruzione colla dimostrazione: Sapete altresì, che nella denominazione altro non fanno, che denominare le cose note nel problema con lettere distinte, come sono A, B, C, D, &c.; e le ignote con lettere diverse, come sono Y, Z, X, &c. Poscia voi sapete ancora, che fatta la denominazione suppongono per ipotesi il problema come fosse fatto, e facendo le quattro operazioni aritmetiche sopra le lettere, che han segnate nella denominazione, per lo mezzo de' segni, che esprimono il più, ed il meno riducono all' ugualità le quantità disuguali, e formano l' equazione, la quale altra cosa non è, che dare una doppia espressione a quello, che si ricerca, cioè fare, che l' ignoto divenga uguale ad una quantita nota. Ma perchè il membro dell' equazione, nel quale si contiene la quantità nota, vien sempre mischiato di alcuna lettera ignota, si fa la reduzione, per mezzo della quale la quantità ignota viene in tutto uguale ad una quantità nota: così il calculo, che avete appreso, vi conduce Filotimo, come in cocchio, a conoscere il grado del problema; perchè se è piano, la quantità nota non passa il grado di A^2, se è solido, o soprasolido ascende al grado di A^3, che vuol dir cubo, di A^4, che vuol dir biquadrato, e sino al infinito; indi secondo il grado al quale è asceso il proplema, si costruisce per il solo cerchio, e linea retta se è piano, per cerchio, e parabola Apolloniana se è cubo, e per l' intersezione di altre curve più composte da moderni penzate, se ascende a più alti gradi. Potrei dirvi, Filotimo, come i problemi, li quali ascendono a solido, e soprasolido, alcune volte rimangan solidi, alcune volte si abbassano al piano per lo mezzo dell' estrazione delle radici, e per lo mezzo di alzare la potestà di due quantità di grado diverse, finche vengano di grado uguale. Potrei dirvi

vi ancora, come l' ingegnosissimo Renato Des-Cartes, oltre l' aver trovato il modo di esprimere in linea le radici dell' equazioni, abbia per lo mezzo della costruzione ridotto a quattro sole formole le formole dell' equazioni piane, ed allo stesso numero le cubiche, le biquadrate, e tutte le altre, le quali erano un numero immenzo. Potrei dirvi di più, come colle sole mezze proporzionali, e colla trisezione dell' angolo, pretendono di costruire tutti i problemi; ma tutto questo sarebbe inutile, perche io non voglio insegnarvi l' Algebra, ma solamente additarvi quello, di che ella e mancanre, ed i danni, che arreca alla mente umana.

Fil. Ditemi prima in che quella è mancante, perche, a dirvi il vero, a me sempre è paruta l' Algebra una via egualmente comoda, che sicura.

Dor. Per primo gli algebristi hanno tanto bisogno d' industria per fare la denominazione, quanto li sintetici ne hanno per ritrovare quelle proprietà, che ad essi servono per la soluzione del problema; perche se avviene, che un algebrista non faccia prima bene idea del problema, e non sia buono sintetico, per modo, che abbia fatta quella idea complessa de i limiti della Geometria, che vi ho insegnato fare; esprimerà con lettere soverchie, e non proprie, le note, e le ignote; onde poi nel progresso del Algoritmo andarà tentoni cercando per un calculo fortuito le note, che l'abbisognano. In fine vi vuole quella espressione fortunata nel denominare, che dicono gl' istessi algebristi.

Fil. E questa è la cagione, per la quale veggiamo alcuni algebristi far certi calculi lunghi, e superflui. Ditemi ora gli altri difetti dell' Algebra.

Dor. Il grandissimo difetto dell' Algebra consiste nelle costruzioni, perche, siccome vi ho poc' anzi accennato, gli algebristi costruiscono l'equazione cubica colla interseзione di cerchio, e parabola, la quale sega il cerchio in tre punti, come ha fatto Pappo Alessandri-

no; però volendo portare all' infinito il loro metodo di costruire, in un problema, nel quale si richiedono cinque medie, immaginano una curva, che sega il cerchio in sei punti, e così sempre fino all'infinito immaginano curve, che segano il cerchio in punti uguali in numero a i gradi del problema, ed uno di più; ma questa via è in tutto mancante, perche questa curva, che s' immagina, non si può in alcun modo descrivere, e con ciò non ha le proprietà, che Renato l'assegna. Alla perfine non vale per la costruzione de' problemi, perche, come vi ho detto, il geometra nella dimostrazione deve a se proponere per ogetto il vero unico, e nella costruzione la più semplice operazione, come è la linea retta, ed il cerchio; ond' è, che quando l' Algebra costruisce i problemi soprasolidi, ella è sensibilmente mancante: Filotimo, errore produce errore, e quindi è, che le curve, perche non si costruiscono col rigore da Euclide prescritto, si vede, che quando si vogliano moltiplicare all' infinito, la costruzione viene più intricata, e l' errore più manifesto, ciò che non avviene della linea retta, e del cerchio, le quali fino all' infinito mantengon sempre la medesima simplicità.

Fil. Ah! questa è la cagione, per la quale gli algebristi, lusingando il lor proprio genio, assentano per massima, che niente importa, che una curva non si possa costruire, ma che basta intenderne le proprietà; laonde per essi la medesima cosa è una curva composta, che una linea retta.

Dor. Appunto Filotimo, e quindi è, che gli algebristi non fanno più veruna differenza fra il più, e meno semplice, fra quel che è utile in pratica, e quel che niente serve, per modo che tolgono in tutto alla Matematica il preggio di ridurre all' atto le speculazioni; e quindi veggiamo, che gli algebristi han trasandato l' uso di far la sintesi, e nella soluzione di un problema vi soddisfanno con un *satis tibi materia suppeditabit*:

bit: ma acciò meglio vediate quanto sia mancante l'Algebra nella costruzione de' problemi solidi, e soprasolidi, a cagione, che gli algebristi moltiplicano le curve all' infinito, osservate, che non avviene lo stesso nelli problemi numerici, ne i quali l' Algebra è utile, perche in quelli non vi è di costruzione bisogno; onde trovato per lo mezzo delle lettere il valore di una quantità uguale a i numeri ignoti, che si cercano, si ritrova sciolto quel problema, il quale non si sarebbe risoluto per la sintesi, come si osserva ne i problemi di Diofanto.

Fil. Dunque voi Signor Doria impugnate queste curve, delle quali si servono nelle costruzioni gli algebristi, perche non si possono descrivere geometricamente? ma la parte nobile della matematica è sempre stata riputata la speculativa; perciò quando la mente contempla le proprietà costanti di una curva, ella esercita in quella quel raziocinio, che è il nobile, ed il solo vero frutto, che dobbiamo trarre dalla Geometria, e niente importa, che non si possa descrivere quella tal curva, della quale ne conosciamo le proprietà: poi, a dirvi il vero, chi descrive una linea retta perfettamente.

Dor. Dunque i problemi, che Euclide ci insegna, sono superflui, e bastavano i teoremi; ovvero insegnandoci esso i problemi, poco importava, che ce l'insegnasse descrivere con modo così semplice, che in pratica altro non mancasse, se non quello, che dipende dalla infermità de' nostri sensi, come avviene della linea retta, e del cerchio: in fine l' utile, che la Geometria arreca alle arti non è da porsi in conto. Ma volete vedere quanto è strana questa massima de' signori moderni? sappiate, che le curve giustamente a cagione, che non si descrivono col rigore de i postulati di Euclide non hanno le proprietà, che li sign. moderni geometri le assegnano, ed io or ora ve lo dimostrerò. Oh Filotimo, sì fatti sentimenti, come son questi di pretendere, che

che sia in tutto vana la costruzione, sono troppo strani. Noi siamo giustamente caduti nell' eccesso opposto a quello, nel quale cadono gli scolastici; perche questi rappresentano la Geometria come scienza meccanica, e perciò l' hanno dalla Filosofia disgiunta, e li moderni la rappresentano come una scienza puramente astratta. Filotimo, le speculazioni sono la parte nobile della mente umana, ma sono altresì inutili tutte quelle speculazioni, che ad utile uso non si riducono. Volete più? la Metafisica stessa, l' ogetto della quale dimanda le più pure speculazioni, che possa mai fare la mente umana, niente valerebbe, se da quella non si deducessero la Morale, la Legge, e la Politica, le quali sono come corollarij di quella.

Fil. Voi mi stringete con assai forti ragioni; ma finalmente vi dirò in difesa degli algebristi, ch' essi si servono di queste curve non per altro, che per necessità, perchè i problemi di gradi superiori non si possono costruire con la linea retta, e col cerchio.

Dor. In questo li compatirei, ma non posso tolerare, che ammettano per geometriche le costruzioni composte, e vietate da Euclide, ciò che ne meno fece Archimede, ne Pappo; perche se Archimede, e Pappo si servirono delle curve nel problema delle due mezze proporzionali, non perciò dissero, che la di loro costruzione era perfettamente geometrica, ne moltiplicarono il difetto delle curve sino all'infinito, considerando curve infinite, le quali mai si possono descrivere, come han fatto i moderni.

Fil. Ma come avevano a fare per superar gli antichi, a i quali vogliono in ogni modo far la guerra?

Dor. Doveano dar corpo all' ombre, come han fatto, e far riputare per cose altissime quelle, che gli antichi han certamente rifiutate per difettose, ed inutili.

Fil. Oh Signor Dorià, lo aver trovate tante curve superiori, colle quali si costruiscono i problemi solidi, e soprasolidi fino all' infinito, o che almeno mostrano

come

come si doverebbero costruire se si potesse, volete che si conti per nulla?

Dor. E se io vi farò vedere, che si costruiscono con la semplice linea retta, allora che direte?

Fil. Attendo con impazienza di veder questo che dite; ma concludiamo ora in breve quello, che sopra l'Algebra avete detto. Voi trovate l'Algebra in due cose mancante, cioè nella denominazione, nella quale non vi è una via generale, e nella costruzione de i problemi solidi, e soprasolidi, la quale, al vostro dire, non è geometrica, e nien te vale per la pratica.

Dor. No Filotimo. Io ritrovo il calculo analitico ancor mancante in ciò che s'attiene al discoprire generalmente la natura delle proprietà geometriche; ed ecco come. Per la via del calculo si ritrovano sempre proprietà, le quali puole avvenire, che siano generali, e che siano particolari, ma gl'algebristi non possono mai dimostrare per calculo analitico se quelle proprietà sian generali, per modo che si ritrovino sempre le stesse sino all'infinito; ond'è, che il metodo analitico è un metodo fortuito, e casuale. Ma questo ve lo dimostrerò chiaramente nell'esempio di quello, che gl'algebristi han fatto nelle curve, quando vi dimostrerò le proposizioni del mio Nuovo Metodo.

Fil. Oh. Voi volete distrugger l'Algebra, le curve, e tutta la moderna geometria; ma con tutto ciò gl'algebristi trovano sempre delle proprietà per la via d'un calcuno, che diletta, e non sò come voi vogliate, che apporti tanto danno alla mente umana, quanto è quello, che voi dite.

Dor. Se voi Filotimo avete fatta bene l'idea del vero, e del falso, e del modo come quella dalla Geometria sintetica si deduca, non provarete molta difficultà ad intendere i danni, che l'uso dell'Algebra speciosa arreca alla mente umana; imperciocche non la trovarrete essere, come la Geometria sintetica, la vera disciplina della mente umana, ma la troverrete essere una inven-

zione

zione fatta per comodo di quelli, che non hanno molta forza per sostener la fatica di un lungo, ma utile raziocinio. Alla perfine, Filotimo, troverrete esser l'Algebra il seme, dal quale si producono molti falsi dotti, e più di quella conoscerete esser perniciosi alcuni nuovi metodi da' moderni inventati.

Fil. In somma voi vi opponete al facile, Signor Doria, e con ciò vi fate incontro all'amor proprio di tutti, perche gli huomini amano di accordar l'utile col facile.

Dor. Sì, ma bisognerebbe, che la sapienza fosse a guisa di qualche donna, la quale facilmente si arrende a chi con poco travaglio la cerca, ma la sapienza è per sua natura difficile Filotimo, perche la mente umana è troppo nella materia sepolta, ond'è, che vi sia, come hovvi detto, di molta forza di raziocinio bisogno per sollevarla da quella, e la Geometria sintetica è quella sola, che la dirozza, e la disciplina.

Fil. Or via non ci dilunghiamo un altra volta in discorsi metafisici, ma narratemi li danni, che l'Algebra arreca alla mente umana.

Dor. Avete veduto Filotimo, che il raziocinio analitico non è conforme a quel discorso, che la natura ha nella mente umana inserito; avete veduto, che quando si vogliano ridurre alla pratica le proprietà, che per lo mezzo del calculo si ritrovano, ella manca nelle costruzioni; e posso ancora dirvi a buona ragione, che le curve Apolloniane, le quali chiamano geometriche, non hanno le proprietà, che se le assegnano, perche non si descrivono da punto, a punto.

Fil. Oh Signor Doria che dite! di grazia lasciamo questa materia, e narratemi più in particolare i danni, che l'uso dell'Algebra arreca alla mente umana.

Dor. Acciò meglio conosciate i danni, che l'uso dell'Algebra arreca, vi farò ora vedere, che tutte le qualità della mente umana, le quali, come vi ho detto, vengono dalla Geometria sintetica perfezionate, coll'uso dell'Algebra non si esercitano; e che sia così. Per

primo,

primo ; coll' uso dell' Alegbra speciosa ; la mente non coltiva il natural raziocinio, che è quello di procedere dalle cose note alle ignote. Per secondo non si fà industriosa, perche si trova col pratico calculo quello, che dovrebbe trovarsi per lo mezzo del raziocinio. Per terzo non si dilata la capacità della mente, perche le idee complesse, ch' ella deve fare, si fanno per lo mezzo delle operazioni aritmetiche ; ond' è, che la mente non le può mai contemplare come proprie, non riconoscendole come figlie del suo discorso, ma del calculo. Per quarto la mente non divien forte, perche non ha di mestiere, nella contemplazione di una dimostrazione, di aver sempre presente una lunga catena d'illazioni, e d'immagini, come nello studio della Geometria sintetica. Per quinto non diviene esatta, e minuta, perche non contempla ella a parte a parte le illazioni, e nel costruire non usa il rigore geometrico. Per sesto la mente non si esercita all' invenzione, perche si riceve per invenzione quella, che il calculo pratico somministra, e non quella, che la mente ritrova per lo mezzo del suo discorso. E per ultimo non si accostuma la mente a conoscere il vero in genere, a distinguere il vero dal falso ne i particolari, ed a formar sistema sopra le cose tutte ; perche la mente non contempla ne i calculi quella unità, che, nelle dimostrazioni sintetiche, si manifesta a chi sà meditare sopra quelle : alla perfine l' Algebra non è, come la Geometria sintetica, la vera disciplina della mente. Oltre a tutto questo da me detto intorno a i danni, che arreca alla mente il calculo analitico, che nell' Algebra speciosa si pratica, è da considerarsi, che l' Algebra speciosa, non discendendo nelle costruzioni esattamente a i particolari, come vi hò poc' anzi detto, non somministra l' invenzione d' alcun problema utile alla Geometria.

Fil. Ma gli algebristi suppongono sempre, che prima si sia studiata la Geometria sintetica ?

Dor. Si, per erudizione, e per quanto serve all'uso dell' Algebra; ma quella meditazione, che da buon metafisico, sopra la Geometria sintetica, io hò fatta a voi fare; e quell' esercizio di scioglier problemi, e d' inventare, che vi ho dimostrato esser necessario per divenir vero geometra, lo reputano superfluo, e lo fanno ne calculi analitici per maggior facilità.

Fil. Ma per ricercare il facile, a me sembra, che abbiano ragione.

Dor. Non si deve cercare il facile quando è dannoso, come io vi ho dimostrato: in prova di ciò vi riferirò Filotimo una cosa, che narra Platone nel Fedro, la quale è in tutto a proposito al discorso, che ora facciamo. Platone nel Fedro narra, che Theuth inventore delle lettere, andò a trovar Thamo re di Tebbe, acciò approvasse la sua invenzione, per comunicarla agli Egizzij, dicendo, che questa avrebbe resa più dotta quella nazione: ma Thamo li rispose, che gl' inventori, come appassionati delle proprie invenzioni, non sono mai giusti giudici dell' utile, o del danno, che arrecano agli huomini le loro invenzioni. Voi siete inventore delle lettere, disse egli, e l' amore, che avete alla vostra invenzione vi trasporta ad attribuire a quella un effetto tutto diverso da quello, che produrrà; perche l' uso delle lettere renderà gli huomini più negligenti ad imparare a cagione, che dandosi tutti a quei segni esteriori, e sensibili, non si affaticaranno più d' imprimere nella lor mente le cose; ond' è, che voi avete trovato un rimedio, che dispensa gli huomini dall' obbligo di tenere scolpite nella memoria le cose, ed in questa guisa voi, ajutando la reminiscenza con questi segni sensibili, rendete pigra, e debole la memoria, e somministrate a i vostri discepoli un modo per comparir dotti, senz'esserlo in effetto.

Fil. Ma ditemi un poco? Come voleva questo Thamo, che gli huomini tramandassero a posteri le memorie

de i

de i fatti senza l' uso dell' alfabeto ? e come senza quello avereſſimo noi avuto notizia delle arti, e delle scienze, che han saputo i nostri maggiori ? Certamente il sentimento di Thamo a me sembra stravagante!

Dor. Questa vostra richiesta potrebbe far sì, che noi entrassimo in un' altro ragionamento, e perciò ci dilungassimo dal nostro proposito; con tutto ciò voglio darvi di quello, che richiedete un picciol saggio, col quale vi mostrerò ancora più evidentemente, coll' esempio del sentimento di Thamo, quanto sia l'Algebra alla mente umana perniciosa.

Fil. Di grazia svelatemi questo mistero ?

Dor. Gli huomini di quei primi secoli credevano, come in vero è, che la memoria de' fatti si conservasse più tramandandola dalla memoria de' padri a quella de' figli, che conservandola ne i scritti, li quali con l' invasione de' popoli conquistatori, e colle distruzioni delle città, che per altre cagioni avvengono, a lungo andare si perdono. Eran poi li padri diligentissimi nel narrare a i figli li fatti de i loro antecessori, e ciò perche, non avendo l' uso delle lettere, non avevano il comodo di ricorrere a i scritti, quante volte li fussero de i fatti dimenticati; perciò privi di quella sì fatta comodità, conservavano non negli archivj, come noi, ma nella loro memoria esattamente le relazioni de i fatti passati. Per quello poi, che s' attiene alle arti, il padre esattamente le insegnava a i figli; questo sì fatto modo praticano ancor oggi con molta utilità i cinesi: ed in vero e certissimo, che le arti non si possono da i scritti apprendere in quella guisa, che s' imparano dalla voce viva, e dalla pratica dell' artefice; e la cagione di questo è, che i modi di pensare, cioe le forme delle menti degli huomini sono tanto diverse, quanto sono diverse le forme di tutti i volti; ond'è, che da ciò ne avvenga, che gli huomini intendan le cose più secondo la forma della lor mente, che secondo la forma della mente di chi le scrive. In fine gli huomini

Mm 2 non

non s' intendono l'un l'altro, se non si ritrovano dalla natura formati di menti, le quali abbiano ne i modi, e nelle profondità di pensare una certa similitudine; ed oltre a ciò, se non hanno fatto l' istesso abito di pensare sopra le medesime materie; e ciò perche la mente più facilmente acquista gli abiti di pensare sopra le materie particolari, che quella facultà di distinguere il vero in genere, che la fa indifferentemente, e con sicurezza conoscere ogni vero, che a lei si appresenta, qualunque sia la materia, che quel vero abbia per oggetto. Questo l' hò io sperimentato nel mio Nuovo Metodo; perche non sì tosto i moderni matematici han veduto i cubi terminare alla retta, che non han saputo distornarsi dall' abito di mente, che avevano fatto a considerarli nelle curve, e non han saputo intendere le mie dimostrazioni. Ora da questa sì fatta disposizione di mente, ed analogia di forme di pensare, che è necessaria acciò gli huomini intendano le cose da altri scritte, ne avviene, che tutti gli huomini ben spesso la medesima cosa scritta diversamente intendano; e quindi è, che veggiamo, che, per molto che chiaramente una cosa sia scritta, non mai vada esente da una mostruosa diversità d' interpretazioni, che gli huomini a quella danno, tutte fra loro diverse, secondo che son diverse le forme delle menti di quelli, che la studiano; e quindi nascono tanti comenti, tante critiche sopra le sentenze, sopra i fatti, e sopra le arti degli antichi, quanti son quelli, che nel Mondo osserviamo, e che han riempito con mostruoso numero di volumi le biblioteche. In ciò che riguarda poi le scienze, seguivano quelli antichi huomini una magior simplicità, che noi, ed erano come i primi romani; li quali tutta la loro scienza nelle leggi delle dodici tavole avevano epilogata, per modo che ogn' un poteva nella sua memoria scolpirle, e ritenerle, siccome facevano; in questa guisa con assai magior simplicità, che noi, vivevano, e con tutto ciò non trascuravano la memo-

ria

ria de'fatti de i loro maggiori, non mancavano delle arti necessarie alla vita, e non ignoravano le leggi, che al buon costume conducono; esercitavano i buoni, e forti abiti dalle leggi prescritti, li quali son quelli, che formano l'onesto, e virtuoso cittadino, e non erano turbati dalle nojose dispute, dalle vane interpretazioni delle leggi, e dalle contese fra essi: amavano quelle leggi, che solo conoscevano, e nelle quali stava riposta l'essenza della loro libertà; e scarchi di privata ambizione, e frà di loro in stretta unione congiunti, solamente a rispingere la rapacità, e la violenza de' vicini, il valore, ed il coraggio impiegavano. Questa era la felice vita di quei virtuosi huomini, la quale, come vedete Filotimo, era prodotta dalla semplicità delle leggi, e dall'amore verso quelle, che la prudenza de' padrj instillava nel cuore de' figli.

Fil. Veramente grandi erano gli effetti, che questo sentimento di Thamo produceva nelle repubbliche: ma se noi eleggiamo questo Thamo per giudice, egli non solo distruggerà l'Algebra, ma la vostra Geometria sintetica, la Metafisica, ed ogni altra scienza ancora; perchè, se egli non voleva l'alfabeto, ne meno vorrà le figure geometriche; e senza le figure geometriche, non sò come si possa apprendere la Geometria, perche immaginare tutto quello immenso numero di figure, e mandare a memoria tutta quella lunga catena di proposizioni, mi sembra un opera superiore alle forze della mente umana.

Dor. Egli non avrebbe proibito, come voi dite, la Geometria sintetica, ma avrebbe proibito l'Algebra; perche, se ben vi rammentate, Thamo credette l'invenzione delle lettere perniciosa a sola cagione, che col comodo, che quella apprelta, gli huomini non aurebbero più fatto uso della memoria; ma io vi ho mostrato, che nello studio della Geometria sintetica, nell'istesso tempo, che si ordina, e si affina il raziocinio, si esercita, e si fortifica la memoria, e l'immagi-

nazio-

nazione: così dunque Thamo avrebbe proibito l'Algebra, nell' uso della quale gli huomini segnano sopra la carta quelle illazioni, e quei discorsi, che nella Geometria sintetica sono costretti di sempre tenere presenti alla loro memoria per poter intendere la conclusione; ma non avrebbe proibito la Geometria sintetica, la quale ordina, e disciplina il raziocinio. Alla perfine Thamo non condannava il buon raziocinio, il quale è necessario per la buona condotta dell' huomo, e della repubblica, ma condannava solamente quelle invenzioni, che rendono pigra la memoria, e l' intelletto; e che sia così. Osservate Filotimo, che il gran preggio, che all'Algebra i moderni attribuiscono, è quello stesso, che Thamo credeva essere il gran danno, che le lettere arrecano alla mente umana; imperciocche la chiamano *le Soulagement de la memorie*, e sono gionti a tale, che rappresentano la memoria, come una potenza inutile a noi dalla natura somministrata.

Fil. Ma questo Thamo mentre riputava pernicioso l' alfabeto, vopo è, che credesse ancora le scienze inutili, e perniciose alla repubblica: imperciocche egli è impossibile, che senza l' uso delle lettere si possano le scienze apprendere; ed in vero come può la mente umana, senza segnare i suoi discorsi, supplire a quella lunga catena di meditazioni l' una dall'altra dipendenti, che la Geometria, e la Metafisica addimandano?

Dor. Thamo credeva forse perniciose le lettere alle repubbliche del suo tempo, perche di pochissimo numero d' huomini si componevano, per modo che il principe più al padre di famiglia, che al monarca si assomigliava. Per queste sì fatte repubbliche non era d' vopo di un legislatore filosofo; perche le poche, e semplici leggi, giunte a buoni abiti, erano a reggerli sufficienti; ma quando poi la repubblica ampia, e distende i suoi confini per molto spazio di dominio, quella naturale prudenza, ch' era sufficiente a go-

governarla in angusti confini ristretta, è forza, che in filosofia si cangi, e che il Senato di saggi metafisici, e pratici tutto ad un tempo si componga: imperciocchè fra gli huomini in molto numero uniti le passioni si moltiplicano, si dilatano, e si accrescono all' infinito; onde facendosi la repubblica piu composta, è necessario in molti, e diversi ordini dividerla, e poscia quegli ordini tenere fra loro uniti per lo mezzo delle leggi scritte, dipendenti da quella morale, che da' semplici, e naturali principj non si ricava, ma dalla Metafisica si deduce. Alla perfine v' è bisogno di Senato, o di principe, che sia filosofo, e legislatore in quella guisa, che nella mia Vita Civile ho divisato; così dunque è da credersi, che Thamo avrebbe permesso alle grandi repubbliche non solo l' alfabeto, ma le scienze tutte. Egli non è però già, che siccome la vera scienza è necessaria alle grandi repubbliche, la falsa non sia ugualmente alle grandi, che alle picciole perniciosa; imperciocchè introducendo, come vi hò detto poc'anzi, le lettere mal' intese, quelle mostruose dispute dalla sofistica prodotte, quelle quasi infinite critiche, e diversità d' interpretazioni, e di pareri intorno alle cose, che si leggono, la schiera de i letterati diviene appunto come sarebbe un esercito mal disciplinato, nel quale ogni soldato volesse da se stesso fare i suoi particolari movimenti, e con ciò rompere quella concordia, che è l' anima ugualmente degli eserciti che della civile società. Che ciò sia vero, Filotimo mio sappiate, che uno de' segni più valevoli ad indicar la caduta degli imperj, e delle repubbliche è l' abbondante numero de' letterati, e de' libri; perche la perfezione non potendo mai stare nel gran numero, è forza, che della gran moltitudine di letterati molti di essi sian falsi, e che il gran numero de' libri, che producono, inutili, o perniciosi; dalla qual cosa poi ne avviene, che quando le repubbliche sono gionte a questo si fatto abuso, nascano quelle contradizio-

dizioni, e diversità di pareri, che poc' anzi vi hò detto, ed in conseguenza di ciò, le menti de' popoli dividendosi frà di loro, e confondendosi, divengano varie, ed incostanti nelle loro massime; perdano l'unità de i sentimenti nella Religione, e nelle leggi, e l'armonia della repubblica confondendosi, finalmente la repubblica perisca. Così dunque io penso, che Thamo gran filosofo avrebbe proibito al suo picciolo principato le lettere, come a quello non necessarie, e come quelle, che lo potevano corrompere, e le avrebbe non solo permesse, ma ordinate a i grandi stati; e credo altresì, che per evitare la corruzione delle lettere, egli le avrebbe in difficilissima parte riposte, in quella guisa, che la natura ha voluto, che le vere lettere non mai da noi senza grandissima difficultà si apprendessero; e forse forse non avrebbe lasciato a tutti gli huomini la libertà di studiarle, ma, com' era costume degli Egizj, le avrebbe fatte insegnare nel Tempio, e solamente a quelli, li quali prima erano stati iniziati allo studio, che vale a dire abituati prima nelle buone massime, e ne i buoni costumi. In vero se la scienza si somministra ad huomini ne i vizij educati, ed abituati, non può altro produrre, che malizia, perche *in animam malevolam non intrabit sapientia.* Così dunque egli avrebbe ordinato, che la sapienza si tenesse nel decoro ad essa dovuto, e che solamente agli animi ben disposti all' acquisto di quella si comunicasse. Ma se ciò non avesse fatto, non avrebbe certamente permesso, come noi permettiamo oggi, li metodi pratici, e a tutti comuni di studiare, ne li tanti ristretti d'istorie, e di scienze, per apprestare alle menti deboli il comodo di comparire agli occhi del vulgo quelle, che non sono, e guastare in questa guisa l'ordine della repubblica.

Fil. Per quel che io posso intendere, voi vorreste, collocando la sapienza in difficilissima parte, far sì, che la repubblica pochi sapienti avesse; ed oltre a ciò voi cer-

ta-

tamente credete, che senza lo studio della Geometria con modo difficilissimo fatto, non vi possa essere vero sapiente; ma questo a me non sembra in tutto vero, perche vi sono moltissimi legisti non geometri; e Cicerone era grande oratore, e nel foro romano persuadeva tutto ciò, che imprendeva a provare, e pure non era geometra: Così, quando voi permettete le lettere, non potete evitare nella repubblica quella folla di sapienti, che avete detto essere alla repubblica rovinosa.

Dor. No Filotimo, io procuro di sfuggir sempre da i sentimenti eccessivi, e perciò distinguo il legislatore dal legista, il dotto nelle cose particolari, dal dotto nelle scienze universali; ma non vorrei, che l' uno usurpasse l' officio dell' altro, mentre da diverso fonte discendono. Rammentatevi Filotimo, che io vi ho distinte in due ordini le menti degli huomini, cioè in quelle, che hanno una forte, e giusta idea del vero in genere, e che sanno ritrovarlo in ogni particolare, che ad esse si appresenta per modo, che niente lor giunge nuovo; e in quelle menti, che sono valevoli a ragionare sopra le cose particolari, le quali, come mancancanti dell' idea del vero in genere, nelle materie ad esse nuove si perdono, e si confondono. Per esempio, io credo, che quando gli huomini formano un lungo abito a raziocinare sopra le cose particolari, possano divenire in quelle buoni geometri, almeno per quanto la materia, che trattano lo permette; e la cagione di ciò si è, perche, come vi ho dimostrato, la natura ha inserito in noi insieme col sillogismo la Geometria, e perciò quando la mente si accostuma sopra una cosa particolare a ben' usare del sillogismo, diviene geometra in quella particolare cosa: quindi nascono buoni legisti pratici, e dotti in quella particolare scienza, i quali non sono alla repubblica, come i falsi filosofi, perniciosi; perche quando non vogliono usurparsi il titolo di legislatore, che dalla buona Metafisica giunta alla pratica del Mondo dipende, pos-

sono divenire buoni nelle arti particolari, e buoni critici ancora in Geometria. Così potrebbe dirsi, che Cicerone divenne geometra eleggendo per suo studio particolare la Filosofia; ma egli è vero altresì, siccome si osserva, che Cicerone nella sua Filosofia è un poco vario, ed incostante, e non abbraccia verun sistema particolare; la qual cosa fa conoscere, che la Filosofia è quella sola, che, come volevano Aristotile e Platone, non può andare dalla Geometria disgiunta. Per quello poi, che s'attiene al metafisico, o sia legislatore, io penso, che per lo mezzo dell' estro a molti huomini naturale, la mente possa a guisa di raggio di luce penetrare nell' astratto, e vedere in quello un barlume delle piu riposte verità metafisiche; ma credo altresì, che la sola Geometria sintetica sia quella, che insegna la mente a camminare ordinatamente nelle astratte meditazioni, ed a fare una giusta idea del vero, e del falso in genere, per modo poi, che quando la mente rimira nelli universali li particolari, forma di tutti li particolari la vera, e giusta idea. Alla perfine l' estro luminoso, facendo vedere un barlume delle verità astratte, ed eterne, infiamma il cuore d' amore verso la virtù; ma la metafisica dalla buona Geometria dedotta rende la mente ordinata, anche nelle considerazioni metafisiche, ed insegna, ad esempio della Geometria, a dedurre dalle conoscenze astratte le leggi da osservarsi, ed in questa guisa si forma il legislatore. Così dunque la Geometria è la vera disciplina della mente, perche ella guida egualmente alla conoscenza delle verità astratte, che a quella delle arti particolari. Laonde quando gli huomini si contentassero di stare ristretti in quei limiti, che la natura ha prescritti alla loro abilità, ne volessero usurparsi quell' officio, che loro non appartiene, il numero de' professori nelle cose particolari non sarebbe alla repubblica pernicioso, e nello stesso tempo la Geometria sintetica studiata da buon metafisico in quel modo, che io hò fatto considerare a voi,

voi, ci darebbe quei legislatori, i quali sono alle repubbliche necessarj; e queste son quelle cose, le quali certamente il pratico calculo analitico non è valevole a produrre. Ora che dite Filotimo?

Fil. Dico, che mi avete fatto fare una piena idea de i limiti della sapienza, e degli utili, e de i danni, che arreca; e che mi avete così convinto de i danni, che l' Algebra produce alla mente umana, ch' io mi riputarei geometra pratico, e volgare, se più la seguissi. Mostratemi ora di grazia, colla stessa evidenza, colla quale mi avete mostrate le fallacie dell' Algebra, la falsità de i nuovi metodi da' moderni introdotti.

Dor. Di questi non accade ne men ragionare; imperciocche, se vi hò dimostrato, che l' Algebra, la quale nelle sue particolari dimostrazioni procede per la via della dimostrazione geometrica, è perniciosa, perche ne i suoi raziocinj procede con metodo vero sì, ma non naturale, come il sintetico, e perche usa il pratico calculo, il quale aliena la mente dal raziocinio; come poi volete, che siano utili li metodi, ne i quali non solo si usa il pratico calculo, ma in molti di quelli non si richiede la rigorosa dimostrazione geometrica? Credo che sappiate, come in questi metodi li moderni si contentano di approssimarsi al vero, per la differenza di una quantità minore di ogni data quantità. Ora se il rigore della dimostrazione geometrica vuole, che si giunga all' uguale; se io vi hò fatto conoscere, che l' essenza della dimostrazione geometrica consiste nell' unità, la quale è quella sola, dove la nostra mente ritrova il vero, questo tanto basta, acciò quelli sì fatti metodi non siano geometrici. E in vero se ciò fusse, si potrebbe tenere per quadrato il cerchio; perche il poligono, che suppone Archimede, io posso immaginarlo d' infiniti lati, per modo, che la differenza che vi è frà il curvo, ed il retto, non sia solamente da 7. a 22. in circa, come l' hà ritrovata Archimede, ma di una quantità minore di ogni data quantità, la quale,

se non potrò esprimerla per numeri, la potrò intendere colla mente, e perciò avrò nella mia mente quadrato il cerchio, ma di modo però, che li rigorosi geometri antichi non l' ammetterebbero. Li geometri sono stoici, e non danno differenza di grado nell' errore, la cosa o è vera, o è falsa, e perciò in Geometria, tanto è falsa una cosa, che si discosta dal vero per la differenza di un grano di arena, quanto quella, che se ne discosta per lo spazio di mille passi. Questo ch' io vi hò detto basta per dimostrarvi, che i metodi de i differenziali, ed integrali, e quello degl' infiniti piccioli, nelli quali li geometri si contentano dell' approssimazione, sian falsi; e basta per farvi conoscere quanta sia la corruzione, che i moderni geometri hanno nella purità della Geometria introdotta.

Fil. Oh Sig. Doria che dite! nelli da voi accennati metodi li moderni geometri non si contentano d' approssimarsi per una quantità minore d' ogni data quantità; e se voi prendete di questi abbagli, il relatore del vostro Metodo vi riprenderà grandemente.

Dor. Importerà molto poco, che mi corrigga d' uno abbaglio in quelle materie, delle quali, per non perdere il tempo, mi son contentato di formarne un idea generale. A me basta sostenere la verità, che nella mia Invenzione si contiene, perche con quella si mostrano vane, ed inutili poco meno, che tutte le cose da' moderni pensate.

Fil. E' verissimo; ma vorrei sapere da voi, quel Metodo degl' indivisibili, che li Signori Autori di Lipsia dicono, che *non nisi infantia fuit Geometriæ*, per qual cagione lo crediate perfettamente geometrico? e qual utile maggiore, che quelli da' moderni inventati, arreca alla Geometria?

Dor. Il Metodo degl' indivisibili considera la linea divisa in punti infiniti, come ancora la considera Euclide, e dalli infiniti punti suppone tirate infinite linee, come sapete; questo accresce di molto la Geometria, perche

vi

vi dà l'agio di trovare moltissime proprietà, considerando le figure geometriche ripiene d'infinite parallele: le proprietà poi, che ritrovate, voi le vedete se sono generali, o particolari, perche le considerate in tutti gl'infiniti punti: poscia in quel Metodo non si usa calculo, il quale, come vi hò dimostrato, è pernicioso, e nell'ordine di dimostrare si usa, come in Euclide, il naturale raziocinio; e che sia così, Voi vedete, che per quel Metodo si dimostra lo stesso, che dimostra Euclide; in quel Metodo procedendo nell'infinito si riducono all'ugualità tutte le differenze, che si ritrovano nelli particolari, ne il geometra si contenta della semplice approssimazione. In fine nel Metodo degl'indivisibili, quello che si suppone è permesso da Euclide, e nelle dimostrazioni si procede per sillogismi, nelli quali vi è la perfetta unità, e perciò è in tutto geometrico, come quello di Euclide. Potrei dirvi, ma non voglio avvalermi d'autorità, mentre milita per me la ragione *à priori*, che questo Metodo quanto è disprezzato dalli Signori Autori di Lipsia, altretanto è stato approvato da Riccardo Albio Inglese, Ismael Bullialdo, huomo tanto celebre in Matematica, quanto ogn'un sà, Francesco Scoten, Isac Bareu, Evangelista Torricello; ed alla perfine ricevuto per comune consenso da tutti li matematici.

Fil. Ma se voi per questo Metodo avete duplicato il Cubo, avete fatta una cosa uguale alla quadratura del cerchio.

Dor. Io non l'hò duplicato solamente per questo Metodo, ma per l'uso de i numeri applicati alle linee, e per lo mezzo dell'unione della proporzione aritmetica colla geometrica, ch'è quello, che vi hò detto, avere insegnato Euclide; e da questo metodo io non hò pigliato in prestito altro, che la facultà di supporre la linea divisa in punti infiniti, ed infinite linee parallele, che partono da quelli; cose tutte le quali senza il Metodo degl'indivisibili, non le vieta Euclide; e quel

ch'è

ch' è più, *nihil petij a Methodis aliarum Nationum*, come vogliono li Signori Eruditi di Lipsia, che sia necessario, per ritrovare qualche cosa, *& tamen à via non abberravi*.

Fil. Ma ditemi di grazia, se voi mi avete insegnato, che anche le verità, che Euclide c' insegna, quando si vogliano porre in pratica, a cagione del difetto de' nostri sensi, non possiamo da quelle conseguir più, che una buona approssimazione; perche volete condannare quei metodi de i moderni, nelli quali si contentano della sola approssimazione? quando quelli vi danno in pratica un' approssimazione minore d' ogni data quantità, cio ch' è lo stesso, che quello, che in pratica si fà per Euclide; perche alla perfine, come abbiamo detto, la linea retta non si descrive mai esattamente.

Dor. Perche Euclide insegna prima il vero unico, donde poi noi conosciamo, che in pratica non si può mai perfettamente eseguir quello, che s' intende: in vece che i nuovi metodi, de i quali ragioniamo, non giungono al vero ne men col discorso, e perciò non si possono nomare geometrici. Del rimanente poi io non voglio disputare sù di questa materia; perche, se si vuole, che l' approssimarsi al vero per una quantità minore d' ogni data quantità sia esattamente geometrico, io ne son contento, perche questo, come vedrete in appresso, non solo non ripugna alle mie dimostrazioni, ma giova a quelle.

Fil. Ora, o siano, o non siano geometrici i nuovi Metodi, a me sembra, che siano utili per le cose pratiche.

Dor. Per le cose fisiche, lo concedo, nelle quali dobbiamo contentarci dell' approssimazione: E in vero il Signor Cassini si è di quelli utilmente servito nelle cose astronomiche.

Fil. Ma a che vale questa verità astratta, quando non si può ridurre esattamente in pratica? la conoscenza di quella reca alla mente una grandissima fatica senza verun

run frutto. A me sembra, che in qualche parte abbino ragione i moderni.

Dor. La Geometria vale a darci la conoscenza del vero unico, ed in astratto, e serve a formare il metafisico, ed in conseguenza di ciò a far sì, che la mente umana faccia idea della giustizia, ch' è una, ed ancora a far formare di tutti i particolari la giusta idea; alla perfine serve a formare il vero huomo. Voglio, come vi hò detto, che l'huomo ami di ridurre in pratica quello, che intende, e che non disprezzi, come i moderni algebristi nelle matematiche le costruzioni, ma non voglio, che, come i seguaci di nuovi metodi, passi all' altro eccesso, e disprezzi la ragione, e la dimostrazione, che sono una cosa stessa. Filorimo credete a me, errore genera errore, e l' inganno và all' infinito, e perciò i moderni geometri, prima coll' uso dell' Algebra, abbandonandosi al pratico calculo hanno perduta l' idea del vero unico, e del vero in genere; poscia perdendosi ne i nuovi metodi, hanno prima ridotta la Matematica alla chimera, e dipoi han fatto di quella una fisica, ed una meccanica; e quindi è poi, che lo stesso disordinato metodo seguendo nello studio della Filosofia, delle leggi, e delle morali, hanno gli huomini in queste importantissime facultà tanta mostruosità di diverse sentenze seguita, che si può quasi dire quel volgare adagio, *quot homines tot sententiae*.

Fil. Ma Signor Doria, voi mi avete fatto con buone ragioni conoscere per fallacissimi l' Algebra, ed i moderni metodi; ma ascoltate di grazia, quanto li moderni parlano magnificamente de i loro metodi, e quanto l' innalzano sopra la Geometria degli antichi. Osservate di grazia, che sembra, che degli antichi parlino con una certa compassione, ammirando di quelli l' ingegno, ma compassionandoli, che habbiamo in così scarsi confini camminato, onde non han posfuto scoprire quelle cose, che hanno scoverte i moderni.

Tac-

Tacciano gli antihi, perche non hanno saputo ajutare la mente umana con il gran soccorso dell'Algebra, ed adducono per ragione, che lo spirito dell' huomo è così limitato, e ristretto, ch' egli è quasi impossibile, che possa giammai durare a quella penosa fatica, che lo scioglimento di una quistione per la via sintetica addimanda; e che perciò l' invenzione dell'Algebra, e li nuovi metodi hanno liberata la mente umana da sì tormentosa fatica: Inalzano poi magnificamente li nuovi metodi, e chiamano la geometria degli antichi, la geometria ordinaria, e lodano gli Antichi solamente, perche privi di tanti lumi, quanti son quelli, che per mezzo dell' Algebra, e de i nuovi metodi hanno ricevuto i moderni, pure han fatto qualche cosa in Geometria.

Dor. Questa è, come vi ho detto Filotimo, la guerra immaginaria, che Tito Livio fà fare a i Greci da' suoi Romani.

Fil. Bene, io voglio acconsentirvi, che l' uso della Geometria sintetica sia più valevole, che l'Algebra, ed i nuovi metodi a formare la mente umana, perche con ragioni intime, e metafisiche me lo avete dimostrato. Voglio acconsentirvi ancora, che se si vuol seguire il rigore d' Euclide, i nuovi metodi non siano geometrici: ma non intendo come, essendosi per lo mezzo dell' Algebra, e de i nuovi metodi facilitata di molto la Matematica, vogliate, che i moderni non abbiano ancora ritrovato delle cose, che furono ascose agli antichi.

Dor. Niuna cosa, la quale somministri qualche profitto alla vera Geometria, han ritrovata; perche non han ritrovato che curve, le quali, come vi hò detto, si contentano immaginarle descritte, senza che le possano nemeno per approssimazione descrivere, ed han trovate altre curve superiori, come sono la parabola cubica, la biquadrata, ed altre, le quali non solo non si possono descrivere *circino, & regula*, ma non si possono descrivere

vere, ne immaginarle descritte, perchè sensibilmente si vede, che non sono curve continuate, ed uniformi ne' loro perimetri. Alla persine voi altro non vedete nella geometria de' moderni, che curve, le quali non hanno veruna delle proprietà, ch'essi le assegnano.

Fil. Oh tacete, tacete di grazia Signor Doria, non più! ....

Dor. Che vi è avvenuto Filotimo, avessi io detta qualche eresia?

Fil. Voi volete escludere ancora, per quel che veggo, dal numero delle linee geometriche, le curve d'Apollonio: In questo modo non vi opponete più a i moderni, ma vi opponete ad Archimede, ed a Pappo Alessandrino, li quali le hanno ricevute per linee geometriche.

Dor. No Filotimo, gli antichi erano più cauti, e considerati, che non sono i moderni. Archimede, e Pappo si sono serviti bensì delle curve nell' invenzione delle due medie continue proporzionali, ma non per ciò le hanno ricevute per geometriche, in modo, che non abbiano sempre desiderato di ritrovare il problema delle due medie per la via piana: a cagion d'esempio. Archimede quadra il cerchio per un' approssimazione, nella quale la proporzione, ch' è frà il diametro, e la periferia del cerchio è per la differenza di 7. a 22. in circa; ma non ha per ciò preteso di aver quadrato il cerchio geometricamente; onde si vede, che si servirono delle curve per necessità, ma sempre stimarono più la linea retta, che le curve, come quella, ch' è assai più semplice, e per mezzo della quale niente manca per eseguir perfettamente ciò, che la mente intende, se non quando fossimo formati dalla natura di sensi più perfetti di quel, che siamo. Alcuni moderni soli son quelli, Filotimo mio, i quali stabiliscono massime universali dedotte dalle loro passioni, e formano leggi da i loro errori. Certamente Archimede non disse, come i moderni, che le curve d' Apollonio, le quali non si costruiscono geometricamente, hanno le proprietà,

 che

che Apollonio le assegna. Non disse, che maggior profitto si ricava dal calculo, nel quale si ragiona con la penna, che usando la sintetica, nella quale si ragiona con la propria mente. Non disse, che la memoria è una potenza inutile, e che non è necessario coltivarla, ma che tutto lo studio dell' huomo deve essere nel procurare di liberarsi dalla necessità di quella, con l' invenzione de' metodi generali, e de' calculi pratici. Non disse, che nelle proposizioni di Euclide non vi era ordine, ne metodo. E finalmente non disse, che i poveri antichi avean fatto molto, avendo seguitò metodi, che sono impossibili dalla mente umana a praticarsi; ma seguitò egli con venerazione le cose ritrovate da' suoi maggiori. Alla perfine gl' antichi non tentarono di diminuire i pregi della mente umana, per inalzare le loro invenzioni.

Fil. Per quel che io veggo, voi attribuite alla mente umana assai maggior capacità di quella, che ad essa non concedono alcuni moderni, li quali ce la fan vedere in tutto angusta, povera, e meschina.

Dor. Quando io considero l' invenzioni geometriche degli antichi; quando io veggo i divini lumi d' un Platone, e d' altri filosofi, parmi, che la mente umana si sia data a dividere a quelli per molto ampia, e capace; e veggo, che in Matematica particolarmente gl' antichi han fatto, senza Algebra, e senza nuovi metodi quello, che i moderni non han fatto col soccorso di tanti lor nuovi ritrovati, tutti indirizzati a liberar l' intelletto dal penoso esercizio dell' attenzione, e della riflessione: Ora se gli antichi facevano quelle sì fatte cose per lo mezzo della Geometria sintetica; parmi, che se li sig. moderni geometri vogliono asserire, che la nostra mente non hà tanto di forza, da poter seguire il raziocinio sintetico, abbino da provare, che da i greci fino a noi, la natura umana si sia cotanto indebolita, che non abbia più forza per seguire il raziocinio sintetico, assai più utile, che l' Algebra: Se però

rò questo è, il Mondo è vecchio Filotimo, e noi siamo presso alla fine di quello. Ma credete a me Filotimo; i moderni assai meglio direbbero, se in vece di dire, che lo spirito dell' huomo è in così angusti confini ristretto, con quel che siegue, &c. dicessero, che lo spirito di alcuni moderni è così pigro, che non sà tolerare quella fatica, che i difficili, ma veri, ed utili metodi richieggono, e perciò si appigliano a i falsi, e perniciosi. Filotimo, uno de' grandi errori del presente secolo è quello, di riponere troppo facilmente frà le cose desiderate, ma impossibili, le cose possibili, ed utili, che essi vogliono evitar di seguire, riempiendo le menti degl' huomini di false massime; ne questo avviene solamente in Matematica no, avviene anco in quelle massime, che riguardano il governo civile, e la giustizia, perche tutti corruno al facile, e reputano ideali tutti quelli veri studj, che somministravano agl' antichi le massime valevoli a formare le virtuose repubbliche.

Fil. Questo è certissimo; ma in tanto voi scherzate Sign. Doria, con dire, che siamo presso alla fine del Mondo. Se però voi impugnate non solo l' Algebra, e i nuovi metodi, ma le curve ancora, voi vedrete tutti i matematici scagliarvisi contro di modo, che non averete forza, da resistere a quelli.

Dor. Io vi farò vedere nel mio nuovo Metodo il problema delle due, ed infinite medie continue proporzionali, sciolto geometricamente per la via sintetica; e vedrete, che usando l'Algebra non si poteva mai sciogliere. Se poi vorranno essere così poco sinceri li sig. matematici, che vorranno preferire le curve alla linea retta, faranno quello, che non averebbe fatto Archimede, ne Pappo, i quali, vedendo questo problema sciolto senza bisogno delle curve, avrebbero certamente rifiutate le curve come inutili: E se i moderni matematici vorranno confessar la verità delle mie dimostrazioni diranno, che Euclide aveva ragione di non ammettere

per costruzione geometrica altra, se non quella, che si fà *circino*, & *regula*, mentre si vede, che questo gran problema, con la costruzione *simplici regula* fatta, si poteva sciogliere. Alla perfine in virtù del mio nuovo Metodo, le curve divengono inutili in geometria, perche si dimostra, che non hanno le proprietà, che se l' assegnano.

Fil. Ora vedo perche parlate cotanto altamente, e cotanto francamente contro i moderni geometri? voi supponete di avere una gran pruova nelle mani, colla quale possiate convincerli di errore, anche col fatto; ma io Signor Doria, vi dico il vero........

Dor. Potrei farvelo leggere nel nuovo Metodo da me pubblicato l'anno 1715. ed in molte altre dimostrazioni ancora da me fatte in appresso a fine di dimostrare, che la parabola Apolloniana non hà le proprietà, che se le assegnano; e che in consequenza di ciò le altre curve d' Apollonio ancora, non hanno le proprietà, che se le assegnano. Ma stimo util cosa essere, che, prima che vi poniate ad esaminar le cose, che vi hò accennate, procuriamo di dedurre da quel, che abbiamo in questo ragionamento in generale detto intorno all' essenza del raziocinio sintetico, le leggi in particolare, con le quali si devono le proposizioni per la via sintetica dimostrate esaminare.

Fil. Di grazia fate più presto, che sia possibile, ch' io appaghi questa mia curiosità d' intendere la vostra novella Invenzione.

Dor. Riserbatevi nel seguente ragionamento a veder con le pruove la verità di quanto in questo vi hò detto.

DIA-

DIALOGO III.

Nel quale si determinano le leggi, colle quali sole si può opponere in Geometria.

Dor. NOi siamo Filotimo, ormai gionti a quel termine, nel quale voi stesso potete conoscere il vero, o il falso, che in una dimostrazione geometrica si contiene: imperciocchè nell' antecedente ragionamento,che frà noi tenuto abbiamo,facendovi io meditare sopra quello, che la vostra mente hà fatto quando avete studiate le proposizioni geometriche a parte, a parte,vi ho insegnato fare la giusta idea del vero,e del falso in genere; onde da quella potete dedurre il modo, come si possa conoscere il vero, o il falso, che si contiene in ogni teorema, o problema particolare, che alla vostra mente si appresenti. Ora volendo noi stabilire quelle leggi, colle quali sole è permesso ad un vero geometra esaminare le altrui proposizioni; siete tenuto da voi stesso di far queste sì fatte leggi: fatele dunque Filotimo.

Fil. Voi mi avete detto, che quantunque io abbia fatto l' idea del modo di dimostrare, cioè a dire del vero, e del falso; ed ancora l'idea complessa de' limiti, e dell' essenza della Geometria, non perciò sono geometra, a sola cagione, che a me manca ancora quella pratica, che nella soluzione de' problemi, e coll' uso del dimostrare si acquista, e colla quale sola la mente umana si accostuma a non errare; dunque non sono ancor valevole a far le leggi, che m' imponete di fare?

Dor. Voi parlate Filotimo, come non aveste fatto la vera idea del vero, e del falso; perche non distinguete quello, che dal fare l' intima idea delle cose si dedu-

deduce, da quello, che senza la pratica non può mai farsi.

Fil. E come?

Dor. Da quello, che vi hò insegnato, dovreste aver inteso Filotimo, che altra cosa è la facultà d'intendere, altra quella d'operare. Lo intendere viene dalla intima, e dalla giusta idea, che per lo mezzo della ben ordinata meditazione, la mente umana fa delle cose, alle quale si volge. L'operare all'incontro viene dall' abito, che in conseguenza di quello, che si conosce, si forma: per la qual cosa se voi avete fatto la vera idea del vero, e del falso, potete formare in astratto a voi stesso le leggi del vero, e del falso; ed in conseguenza di quelle, distinguere la vera dimostrazione dalla falsa, quantunque non siate ancora da voi stesso capace di fare una dimostrazione, ne di sciogliere un problema propostovi senza più, e più volte in errore inciampare. E questa infelice proprietà dell'huomo dipende da che, l'huomo è bensì a similitudine di Dio, cogitante, ed operante; ma non è come Dio, nel quale l'opera, ed il pensiero sono un'istessa cosa: L'huomo vedrà dentro il seno della Metafisica l'essenza, la natura, e i limiti d'una scienza; ma non perciò potrà senza il soccorso degl'abiti eseguir quelle cose particolari, che in teorica conosce doversi eseguire. Vedrà le verità, che deve eseguire nella morale; ma senza il soccorso de' virtuosi abiti, non potrà virtuosamente operare: E quindi è quello, che veggiamo spesse volte avvenire, cioè, che più facile all'huomo è l'eseguire a forza d'abiti quelle virtuose operazioni, che altri ad esso insegna di fare, senza che di quelle intenda la natura, e l'essenza; che porre in pratica senza il soccorso degl'abiti, quelle cose, che solamente intende: Dalla qual cosa si deduce, che quei maestri, i quali alienano i loro discepoli dall'utilissimo abito di sciogliere problemi per la via sintetica, persuadendoli a sciogliergli per la via de' calculi, l'ingannino; perche

non

non facendoli fare abito al ragionare non disciplinano la mente nel raziocinio. Così dunque in virtù dell' intima idea, che avete fatta della Geometria, avete acquistata la facultà di emendarvi, come nell' antecedente ragionamento vi hò detto; ma non avete acquistato quell' abito di ben ragionare in tutte le cose, che solamente con lungo esercizio si acquista. Questo è quell' utile, che la mente umana ricava dal meditare intorno alla Geometria, da buono metafisico; e dall' inestare la Geometria colla Metafisica, e non dall' inestare, la Metafisica con i calculi pratici, come vogliono alcuni signori moderni, che si faccia. Questi, che vi hò narrati, sono li mirabili effetti, che la Metafisica nella mente umana produce cioè far sì, ch' ella intenda l'essenza di tutte quelle cose, sopra le quali prende a meditare, senza che poscia il metafisico possa senza il soccorso della pratica eseguir quelle cose, che conosce. Un vero metafisico Filotimo, può agevolmente conoscere gli altrui errori, e la perfezzione, che devono avere le cose, senza ch' esso possa far quelle. Alla perfine la Metafisica è valevole a ben' ordinare la pratica; e la pratica ha la forza di far sì, che l'huomo eseguisca quelle conoscenze, che l'intima cognizione delle cose, colla Metafisica acquistate, ci somministra. Così dunque Filotimo, avendo già voi conosciuta in virtù de' nostri ragionamenti l'essenza della Geometria, siete abile a distinguere il vero dal falso, ma non avete ancora la facultà di giustamente tessere da voi medesimo una bene ordinata dimostrazione. Questo però non impedisce, che non possiate fare da voi medesimo le leggi particolari, colle quali si deve esaminare una proposizione per la via sintetica dimostrata. Fatele dunque.

Fil. Persuaso dalle vostre ragioni vi concedo, che posso intendere la verità, o l'errore, che in una dimostrazione si contiene; ma non le dimostrazioni, che riguardano una nuova invenzione, com' è la vostra;

che

che sia così. Li Signori Autori di Lipsia dicono, che le vostre dimostrazioni sono nuove: *Nam prater distinctionem inter id, quod rectis convenit, qua talibus, & qua cubis, & novas, satisque longas demonstrationes loci cuborum rectilinei ad I. & III. obiectiones allatas &c.* così dunque io intenderò quelle dimostrazioni, alle quali la mia mente è accostumata; ma queste vostre nuove dimostrazioni, sopra le quali non hò ancora formato abito di mente, non saro sufficiente ad intendere.

Dor. Dicono male li Signori Autori degl'atti di Lipsia; perche se bene vi rammentate quello, che nell'antecete ragionamento vi hò insegnato, conoscerete, che dimostrazioni nuove non ve ne sono per quelli, li quali han fatto l'idea del vero in genere; che sia così. Il vero è uno, la dimostrazione è un discorso ordinato, nel quale si contiene l'unità; dunque questo discorso è generale, ed unico, ed adattabile a tutte le materie: dunque non vi sono dimostrazioni nuove per quelli, li quali han fatto la giusta idea del vero, e del falso in genere. Dunque li Signori Autori degli atti potevano dire costruzioni nuove, e non dimostrazioni nuove; perche, ordinare una nuova costruzione, purche sia legitima, è lecito ad ogn' uno; ma dire questa è una nuova dimostrazione, non lo possono dire altri, che quelli, li quali nell'antecedente ragionamento vi hò detto, che ragionano per abito di mente fatto sopra le cose particolari, e non in conseguenza dell' idea, che hanno del vero, e del falso ingenere; perche se avessero idea del vero in genere, conoscerebbero, che nelle dimostrazioni gli argomenti particolari, co i quali si dimostra una verità, sono diversi; ma che l'essenza della dimostrazione in genere è sempre una, e la stessa. Considerate ora Filotimo, che questa mancanza della conoscenza del vero in genere, la quale regna frà molti matematici è quella, che fa sì, che nelle nuove invenzioni, le quali si pruovano con argomenti,

a i quali essi non sono accostumati, la lor mente si confonda, e si perda. Così se voi avete quest' idea del vero, e del falso in genere, siete obbligato a formar quelle leggi, colle quali sole si può opponere in Geometria.

Fil. In vero li Signori Autori degli atti in quelle parole, *Novas demonstrationes* han fatto vedere, che chi và troppo appresso a' calculi, ed a' nuovi metodi, acquista una buona pratica di calculare, ma perde la conoscenza del vero, e del falso, appunto come voi avete detto. Or via io mi accingo a far queste leggi, che voi m' imponete, ma prestatemi il vostro soccorso?

Dor. Son pronto ad acconsentire alla vostra richiesta. Cominciate dunque a ritrovare il principio, donde avete da dedurre queste sì fatte leggi.

Fil. Voi mi avete insegnato, che la dimostrazione altra cosa non è, che l' arte d' insegnare, o sia spiegar quello, che la mente per lo mezzo dell' industria, e dell' ordinato discorso, ha ritrovato; e mi avete insegnato altresì, che quel che fà, che la dimostrane sia certa, e indubitata, è l' unità del discorso, che in quella si contiene; e che questa unità consiste nell' ordine, col quale si dispongono le parti di una proposizione, e nel modo come tutte l' una dall' altra dipendono: Adunque se io dividerò una proposizione nelle sue parti, e considererò le condizioni, che deve avere ogn' una di esse parti, come sola considerata; e poscia la relazione, che devono avere fra di loro le parti della dimostrazione, formarò agevolmente le leggi del dimostrare; e in conseguenza di quelle, formarò ancora le altre leggi, colle quali sole si può opponere in Geometria.

Dor. Voi avete ottimamente fatta l'idea in generale del vero, e del falso. Avete ora da discendere al particolare, e spiegarmi l'essenza della dimostrazione geometrica; ma prima di ciò fare, dovete additarmi i modi, con i quali si argomenta in Geometria.

Fil. In Geometria quelle proposizioni, che si dimostrano, o sono teoremi, o problemi: Ne i teoremi l' inventore spiega, e dimostra una proprietà, che ha ritrovata; e nelli problemi insegna fare una cosa, che ha inventata, che vale a dire, ridurre in pratica una proprietà ritrovata. Di poi tanto i teoremi, quanto i problemi posson essere generali, o particolari, che vale dire, quando quella proprietà è vera in tutti li casi, o pur vera in alcuni casi particolari solamente; e questa distinzione delli problemi generali da i particolari, è tenuto fare chi dimostra. Oltr' à ciò dell' istesso modo, col quale si dimostra per la via negativa una cosa essere nel modo, che si è proposta; si dimostra ancora una tal cosa non poter essere, o non potersi fare, perche ripugna ad una verità nota, come nella settima del Primo d' Euclide; o perche ripugna ad una verità dimostrata. In somma tanto per la via positiva, quanto per la negativa si dimostrano quelle proprietà geometriche, che possono essere, e quelle, che non possono essere; e tutto ciò, che si può fare, e che non si può fare, sempre seguendo l' unità del discorso nelle dimostrazioni, e nelle conclusioni.

Dor. Voi distinguete ottimamente Filotimo; ma ditemi li modi d' argomentare, che servono per render perfetta una dimostrazione?

Fil. I modi d' argomentare sono due; il positivo, ed il negativo. Il positivo è quando dalle illazioni antecedenti nasce per necessaria conseguenza, che la cosa sia nel modo, che si è proposta. Il negativo è quando posto per ipotesi, che la cosa non fusse nel modo, che si è proposta, ne nascerebbe per conseguenza, che non sarebbe vera qualche proprietà nota, o dimostrata.

Dor. Ma ditemi Filotimo; questi due modi di dimostrare sono ugualmente legitimi?

Fil. Sono certamente ugualmente legitimi.

Dor. E per qual cagione?

Fil. Perchè in ambidue questi modi si conclude egualmen-

mente, che la cosa non può esser in altro modo, se non in quello, nel quale si è proposta; essendo lo stesso il dire, che una cosa è certa per conseguenza delle illazioni antecedenti, quanto dire, ch' una cosa è certa perche se non fusse nel modo, che si propone, un' altra cosa vera non sarebbe vera. In fine tanto nel primo modo di argomentare, quanto nel secondo, vi si contiene perfettamente l' unità, mentre in ogn' uno di essi si dimostra, che la cosa non può essere in altro modo, che in quello, col quale si è proposta: Adunque tanto il modo positivo, quanto il negativo sono legitimi, appunto come han creduto Euclide, ed Archimede.

Dor. Or vedete Filotimo, che non si giugne a questa sì fatta conclusione, se non dimostrando; e perciò dividetemi una proposizione nelle sue parti, e narratemi di ogn' una le condizioni, che deve avere.

Fil. Le parti, nelle quali deve disponere la sua proposizione colui, il quale hà ritrovata una verità, son le seguenti, cioè proposizione, esposizione, costruzione, dimostrazione, e conclusione.

Dor. Ditemi ora le parti, delle quali ogn' una di queste si compone?

Fil. La proposizione si compone de' dati, e di quello, che si vuol dimostrare. Nella esposizione si spiega più in particolare, e si chiarisce quello, che si è proposto nella proposizione. Nella costruzione s'ordina quello, che si deve fare. Nella dimostrazione si prova in conseguenza di quello, che si è fatto nella costruzione, e in conseguenza di altre proprietà o note, o dimostrate, quello, che si è proposto nella proposizione. E nella conclusione si conclude quello, che nasce per conseguenza della dimostrazione.

Dor. Ottimamente. Ditemi ora più in particolare le condizioni, che ogn' una delle sudette parti della dimostrazione deve avere, acciò la conclusione sia certa?

Fil. Nella proposizione i dati non devono essere ripu-

gnanti a qualche cosa, la quale sia stata dimostrata vera. Nella esposizione si deve chiaramente spiegare in particolare quello, che si è detto in generale nella proposizione. Nell' costruzione non si può ordinare alcuna cosa, la quale ripugni alli postulati d' Euclide. Nella dimostrazione le illazioni si devono dedurre da quello, che si è ordinato nella costruzione. Ogn' illazione deve nascere da verità dimostrate, e consecutivamente ogn' illazione si deve dedurre dalla verità antecedente ritrovata, acciò sia un legitimo sillogismo, e la dimostrazione un' aggregato di sillogismi l' uno dall' altro dipendenti, ciò che forma l' essenza dell' unità; e in conseguenza di ciò l' essenza del vero. E nella conclusione poi si deve concluder quello, che nasce in conseguenza della dimostrazione, e quello, che nasce in conseguenza della dimostrazione, dev' esser lo stesso, che quello, che nella proposizione si è proposto di provare, se è teorema; o di fare, se è problema. In questa guisa in una proposizione geometrica vi si contiene l' unità, perche nella conclusione si racchiude tutto quello, che si è fatto nella costruzione, e tutto quello, che si è provato nella dimostrazione; e in conseguenza di ciò si ritorna al principio, ch' è la proposizione.

Dor. Ma per conoscere se le illazioni, delle quali si compone la proposizione sian vere, e legitime, o pur false, e insussistenti; qual regola si deve tenere?

Fil. La legge del sillogismo: perche voi mi avete insegnato, ch' ogni dimostrazione si compone di sillogismi; adunque se il sillogismo è falso, falsa è ancora l' illazione, e tutta la proposizione.

Dor. Voi mi date Filotimo, sempre maggiori argomenti della perfetta idea, che avete fatta del vero, e del falso. Ora, siccome è il nostro costume, datemi un esempio in pratica del modo, col quale si deve esaminare una proposizione geometrica, nelle sue parti dividendola; e perciò eleggete una proposizione d'Eucli-

clide, e dividetela nelle sue parti; e poscia fate sopra di quella l' esame secondo le leggi, che avete prescritte.

Fil. Oh Signor Doria, questo sente un poco del pedantesco; abbiam detto le regole in generale, questi particolari minuti sono superflui. Chi non intende una dimostrazione d'Euclide?

Dor. No Filotimo, non sono superflui, anzi sono necessarj; perchè le leggi della dimostrazione sintetica sono così trasandate, ch' or mai sono dimenticate poco men, che da tutti; e quando le cose sono gionte all' ultimo abuso, è necessario ristituirle a i suoi primi principj: Adunque, siccome il tempo domanda queste sì fatte cose, eleggete una proposizione d' Euclide, e dividetela nelle sue parti.

Fil. Poiche così volete, dividerò nelle sue parti la xxxii. d' Euclide, e poi la esaminarò.

Dor. No, eleggiamo una, nella quale Euclide dimostra per argomento negativo; perche questo è il modo, del quale più sovvente io mi avvaglio nella mia Duplicazione del Cubo.

Fil. Prendiamo quella, che volete.

Dor. Prendiamo la prima del Terzo, la quale ancor che facilissima, niente importa, perchè l'istesso argomento è nelle difficili, che nelle facili proposizioni; e l'essere una proposizione più difficile dell' altra, da altro non dipende, se non dall' esser composta di maggior numero d' illazioni, o da più lunga operazione.

Fil. E' certissimo. Eleggiamo dunque la prima del Terzo.

Dor. Leggiamola, e per alleviarvi la fatica, prendiamo li primi Sei libri d' Euclide tradotti in italiano dalli Signori matematici di Bologna, perche in quelli si leggono le proposizioni divise ogn' una nelle sue parti, appunto come voi avete detto.

Fil. Eccola.

PRO-

PROBLEMA PRIMO.

PROPOSIZIONE PRIMA.

Dato un circolo, trovare il centro.

Tav. VI. F.XXXVI.

Dato il circolo DAFB.
Bisogna trovare il suo centro T.

OPERAZIONE

post 4.) *Si pigli nel circolo la corda AB*
pr.10. 1.) *Si divida AB in due uguali AC. CB*
pr.11. 1.) *Si alzi, e prolunghi la corda DCE perpendicolare ad AB.*
e. post. 2.) *Si divida DE in due uguali DT. TE.*
pr.10. 1.) *Dico, che T è centro del circolo DAEB.*

INSTANZA

T Non è centro del circolo DAEB; ma G.

PREPARAZIONE

post. 1.) *Si conducano le rette GA, GC, GB.*

RISPOSTA

d.15. 1.) *Ne' triangoli GAC, GBC, il lato GC è comune, & i lati CA, CB, sono uguali.*
pr. 8. 1.) *Le basi GA, GB saranno uguali.*
d. 10. 1.) *Gli angoli GCA, GCB saranno uguali.*
& ass.12.) *L'angolo GCA sarà retto, ed uguale all' angolo DCA contro l' ass. 9.*
ass. 16.) *Dunque T è centro del circolo DAEB.*

Dor.

Dor. Fateci ora l' esame.

Fil. Nella proposizione il dato, ch' è un circolo si deve ammettere, perche è nelle definizioni; quel che si domanda non è cosa, la quale sia stata dimostrata impossibile; dunque devo passare all' operazione, o sia costruzione. Nella costruzione si ordinano quattro operazioni: Le due prime sono legitime, perche si prende una corda, ch' è una linea retta, e si divide un' altra linea in due parti uguali: La terza è legitima, perche si prolunga una linea retta: E la quarta è ancor legitima per l' istessa cagione. Niega poi per ipotesi, che T sia centro del cerchio, e tira tre altre linee rette, ciò che si può fare. Avendo dunque già veduto, che li dati nella proposizione sono legitimi, e che la costruzione è ancor legitima, devo passare a far l' esame a parte, a parte di ogn' una delle illazioni, delle quali si compone la risposta, o sia dimostrazione.

Dor. Fatelo dunque.

Fil. La dimostrazione si compone di quattro illazioni: La prima illazione, cioè che per falsa ipotesi li triangoli ASC, e BSC siano uguali, è certissimo. La seconda, cioè la conseguenza, che le due AG, CB siano uguali, è certissimo, perchè la prima è certa, e la seconda dipende dall' antecedente. La terza illazione, cioè che gli angoli GCA, e GCB siano uguali, è certissimo dalla supposizione antecedente. La quarta illazione, cioè che l' angolo GCA, il quale è retto per la conseguenza della falsa ipotesi, sia uguale a DCA, ch' è retto, è verissimo, perche dipende dalla falsa ipotesi data. Dunque che T sia centro del cerchio, è la conseguenza; perchè data l' ipotesi falsa, le illazioni sono tutte conseguenze necessarie di quella, perche l' una dall' altre dipendono; e perciò è verissimo l'assurdo, che nascerebbe, se la cosa non fusse come si è proposto di provare nella proposizione; ond' è, che nella proposizione vi è la per-

perfetta unità per negazione, e perciò il centro del cerchio non può esser altro, che il punto T.

Dor. Così si esaminano le proposizioni geometriche; e se così esaminarete la mia Duplicazione del Cubo, la troverete tanto vera, quanto vera avete trovata questa proposizione. Fate ora le leggi, colle quali si può opponere ad una proposizione geometricamente dimostrata.

Fil. Voi volete scherzar meco Signor Doria, per vedere se io inciampo in errore; non è così?

Dor. E perche?

Fil. Perche in Geometria la verità essendo una, è manifesto, che l'oppositore deve camminare sù quest' istessa linea dell' unità; e perciò non può in altro modo opponere, se non facendo quel, ch' io hò fatto, quando hò esaminata questa proposizione; e se in conseguenza di ciò ritrova nella proposizione qualche dato non vero, o dimostrata impossibile qualche cosa di quelle, che nella proposizione assume di provare; ovvero se ritrova nella costruzione ordinata qualche cosa, che non possa farsi *circino; & regula*, o nella dimostrazione qualche illazione non vera, o pure, che non dipenda dalle antecedenti illazioni, deve additarla con un segno, perche allora la proposizione sarà falza: Ma se non ritrova alcuno errore di quelli, che hò detto poter essere nelle parti della proposizione, è obbligato ad ammetterla; e questo è il solo modo; questa è la sola legge, colla quale si può opponere in Geometria. Volete altro?

Dor. Voi avete così ben intesa l' idea del vero in genere, che avete restituito a quella primiera unità di vero la Geometria, dalla quale l'uso de' calculi, e de' nuovi metodi l'hanno deviata. Ma ditemi un poco? Le curve, che chiamiamo geometriche, come sono la parabola, l' iperbole, e l'ellisse, non si descrivono *circino, & regula*; dunque secondo voi sono linee meccaniche?

Fil.

Fil. Oh! queste son geometriche.

Dor. E perche?

Fil. Perchè hanno proprietà costanti, le quali s'intendono dalla mente; ed oltre a ciò le ha usate Archimede, e Pappo Alessandrino, e perciò bisogna venerarle.

Dor. Ma non vi hò io detto, che Archimede, e Pappo Alessandrino le hanno usate per necessità, e mai le hanno riputate linee geometriche, per modo tale, che se avessero potuto far con la linea retta quell'istesso, che han fatto con la parabola, ed il cerchio, o con l'intersezione di due parabole, averebbeno volontieri rinunziato alle curve, per ubbidire ad Euclide.

Fil. No Signor Doria, potrebbe anche avvenire, che quelle tre curve, le quali hanno proprietà costanti, le avesse ammesse ancora Euclide.

Dor. Oh! questo no Filotimo mio; Euclide era perfetto metafisico, e perciò conosceva, che nelle cose, le quali han per oggetto la quantità, la mente umana non può mai ritrovare il vero in altro modo, che per quello della simplicissima, ed esattissima costruzione. Così ne Euclide, ne verun degl' antichi hà mai creduto, come han creduto i moderni, che le curve d'Apollonio abbiano proprietà vere, e costanti. Per quello poi, che ad Euclide s'attiene, sappiate Filotimo, che ne meno nell' Ottica si servì egli delle curve d'Apollonio.

Fil. Ma Euclide non ammette per geometrico il cerchio, ch'è una curva? dunque generalmente non rifiuta le curve: Li moderni dicono, che la parabola, l'iperbole, e l'ellisse supposte descritte, hanno proprietà costanti, come il cerchio; dunque perche non l'averebbe ammesse Euclide? e poi queste curve nascono dal cerchio, perche come curve hanno qualche relazione col cerchio.

Dor. Vi hò detto Filotimo, che mal grado quello, che dicono i moderni, le curve non hanno proprietà vere,

e costanti; e questo lo vedrete ampiamente dimostrato in appesso.

Fil. Di grazia spiegatemi questo vostro Metodo, o sia questa vostra Duplicazione del Cubo; perche io sono così impatiente di vedere il vero, o il falso delle vostre speculazioni, che non posso contenere la mia curiosità.

Dor. Voglio soddisfarvi; ma prima voglio esaminarvi ancora sopra il modo, che si deve tenere, quando si oppone ad una proposizione geometrica.

Fil. Siete ormai divenuto troppo critico Signor Doria. Io penso d' avervi dato gia buon saggio della mia sufficienza per distinguere il vero dal falso in una dimostrazione geometrica?

Dor. E' verissimo; ma l' immagine del passato periglio, mi rende dubbio. Io hò veduto un' intiera società, ragionando in Geometria, declinare da quella linea del vero, che voi stesso mi avete così bene additata poc'anzi, e perciò vò farvi ancora alcune dimande.

Fil. Fatele poiche così vi piace.

Dor. Se uno vedendo la mia proposizione, nella quale asserisco, che li cubi delle applicate alla parabola piana terminano ad una linea retta, dicesse, questo non può essere, perche io hò dimostrazione, che terminano ad una curva; e volesse escludere con questo argomento la mia proposizione. Ragionarebbe egli bene? Sarebbe egli obbligato a far quell'esame alla mia proposizione, che voi poc' anzi avete fatto alla prima del Terzo d' Euclide?

Fil. Discorrerebbe bene, se la sua dimostrazione fusse in ogni sua parte legitima: ma se la sua dimostrazione fusse fondata sopra non legitima ipotesi; o che patisse altro somigliante difetto, ragionarebbe male; perche non potrebbe egli sapere qual sia la vostra ipotesi, per mezzo della quale voi conducete li cubi alla retta, per ciò sarebbe obbligato a far l'esame nel modo da me prescritto.

Dor.

Dor. E se li Signori Autori della società di Lipsia, li quali pretendono d'aver dimostrato, che il cubo non si può duplicare in altro modo, che in quello d'avvalersi di una delle sezzioni del cono, dicessero; la proposizione di questo nuovo Autore è certamente falsa, e perciò non merita nè meno esser letta. *Et hic quidem &c.* ragionarebbero bene?

Fil. Ragionarebbero bene, perchè due cose contrarie non possono tutte due esser vere; laonde se li Signori Autori di Lipsia han dimostrato, che il cubo non si puo duplicare, voi Signor Doria non lo potete aver duplicato.

Dor. Ma acciò possano dire a buona ragione di aver dimostrato, che il cubo non può duplicarsi, quale dimostrazione bisogna ch' eglino apportino?

Fil. Bisogna che abbiano dimostrato, che se il cubo fusse duplicato per la via piana, ripugnarebbe a qualche proposizione d' Euclide, o a qualche prima verità, o a qualche proposizione legitimamente dimostrata, o costruita nel modo, che vuole Euclide.

Dor. E se avessero dimostrato, che le radici, e i cubi terminano alle curve, avrebbero ragione di dire, che non possono terminare alle mie rette?

Fil. Aurebbero ragione certamente, se avessero dimostrato, che terminano alle curve i cubi, e le radici: Ma se la loro dimostrezione non fusse in tutto legitimo, sarebbero certamente obbligati ad esaminare ogn' altra ipotesi, che da altri si proponesse, perche siccome le ipotesi posson essere infinite, così ancora le dimostrazioni posson essere infinite; e purche le ipotesi siano legitime, le dimostrazioni posson essere ancor legitime.

Dor. Oh vedo bene Filotimo, che voi avete perfettamente fatto l' idea del vero, e del falso; e volete vedere, ch' è, come voi dite? Li sign. moderni matematici, in tutto acquietati sopra le curve, han creduto esser quelle le colonne d' Ercole; quindi fatta una distinzione fra i

problemi piani, e i solidi, seguendo in ciò anche l'esempio degli antichi, con solamente seguir la sentenza di Renato des-Cartes han deciso, che per la costruzione de' problemi solidi, e soprasolidi non si può passare al di là delle curve; delle quali sono stati paghi, e contenti in modo, che rimproverando agli antichi il soverchio rigore da essi usato nel rifiutar le curve come linee meccaniche, hanno altamente vantato, che quantunque le curve meccanicamente si descrivano, hanno però esattamente le proprietà, che se le assegnano: e quindi si son dati tutti ad ampliare la dottrina delle curve, dichiarando essere un chimerico, e vano attentato quello di procurar di ritrovare il loco delle radici, e de' cubi in altre linee, che nelle loro curve. Ma se avessero studiato un poco gl' antichi, avrebbero veduto, che Platone nel libro intitolato *Epinomis*, dice, esservi una certa arte di ridurre le quantità di natura solide a piani, o lineari; e che questo sarebbe più tosto divino, che umano. Le parole del Greco trasportate in latino son queste. *Numeri, licet in tres usque dimentiones adaucti, naturæ solidæ fiant similes, & qui planorum, aut linearum sedes tuentur, tùm bis, tùm inter se dissimiles, tamen alia quadam arte rursus similes fieri possunt, quod quidem non humanũ, sed divinum miraculum videbitur intelligenti.* Ora vedrete, quando vi spiegarò il mio Metodo, che quel *tamen alia quadam arte rursus similes fieri posse*, altro forse non è, che pigliare in Geometria l'unità in linea, e in numero; e certe applicate, che servono di limiti, anche prenderle in numero, e in linea; con la qual cosa si dimostra, che i cubi terminano alla retta, e che la costruzione delle curve non è geometrica. Così dunque Filotimo mio, li Signori matematici moderni non potevano, come vi hò detto, determinar le curve per ultimo termine de' pensieri della mente, ma bisognava prima legger Platone.

Fil. Oh! se gli Signori Autori degli atti di Lipsia sentissero questo, che voi dite, tanto maggiormente li sentireste

reste dire; *de se ipso magnificè magis dicta videri possint, quam scriptorem mathematicum decet*.

r. Io sò Filotimo, che lo scoprimento di questo problema è stato più un effetto di fortuna, che del mio debole intendimento: con tutto ciò però io non ne devo nascondere i pregi, per lusingare l'altrui invidia.

Fil. Di grazia non mi tenete più a bada, ma spiegatemi le vostre proposizioni, perchè io le voglio certamente ritrovar false.

Dor. Oh Filotimo! Voi non siete ancora sufficiente ad intendere il mio Metodo.

Fil. E perche?

Dor. Per quello appunto, che vi hò detto nel primo ragionamento, che insieme tenuto abbiamo, cioè, che le passioni vagliano ad oscurar la mente, e renderla inabile ad intendere una verità.

Fil. E come volete voi, che una dimostrazione geometrica la mente possa mai ignorarla, a cagione delle passioni?

Dor. La mente umana tesse i suoi raziocinj secondo le prime direzioni di penzare, che prende; e perciò se la prima direzione, ch' ella prende in un raziocinio, le viene soggerita dalla volontà, và cercando quelle ragioni, che la lusingano, ed esclude da se quelle, che la strascinano per forza a quella conclusione, che abborrisce. Da questa sola infelice proprietà trae la sua origine la perniciosa sofistica; e da questa nascono quegli errori de' falsi dotti, che sempre pajono giustificati da apparenti ragioni: perciò Filotimo mio in Geometria bisogna far tutto il contrario di quello, che si dee fare nella Fede. Nella Fede bisogna *captivare intellectum in obsequium fidei*, e nella Geometria bisogna *captivare voluntatem in obsequium intellectus*, e confessar la verità.

Fil. Ma questa debolezza della mente umana, a riguardo delle passioni, rende l'umanità troppo misera, se le fa perdere sino la forza di conoscere le verità geometriche.

Dor.

Dor. La forza per conoſcere le verità non ſi perde,ſe non che per noſtra colpa.La rea volontà è quella,che avvalora le paſſioni , e ſomminiſtra forza all' ignoranza ; e volete vedere, ch' è così? Quando noi eſaminiamo una coſa,la verità ſi appreſenta alla noſtra mente,ma involta in una nube di dentro la quale ella manda raggi di luce;ma noi,ſentendoci da quelli sì fatti raggi pungere un poco gli occhi, volgiamo dalla luce del vero gl'occhi dell' intelletto , e gl' apriamo all' errore ; e ciò fatto , la mente , che per ſua natura vuol ragionare , indirizza i ſuoi diſcorſi al fine di giuſtificare gli ſuoi errori , e non a quello di diſcoprir la verità ; e per ottenere il ſuo intento teſſe ſillogiſmi ſopra ipoteſi falſe, a lei ſoggerite dalla paſſione dell' invidia , o dell' ambizione : e quindi è , che fà paſſaggio da errore in errore , e da malizia in malizia . Così Filotimo mio , ſe voi vi ponete ad eſaminare una propoſizione geometrica col fine di ritrovarla falſa , dirizzarete i voſtri paſſi per la via torta , ed abbracciarete la prima apparente ragione , che ve la fa parer falſa ; ma io poi con argomento tanto chiaro , quanto è quello , che due , e trè non fan ſette , vi moſtrerò il voſtro errore .

Fil. Ed io lo confeſſarò .

Dor. Nò Filotimo , non lo confeſſarete ; perche con la volontà rea rimarrete convinto sì , ma non avrete la libertà d' animo di confeſſare al vulgo , che avete errato , perche quello non vi può convincer d' errore . Queſto lo fareſte ſe foſte Galileo , ſe foſte Keplero , ſe foſte Buonaventura Cavalerio , ſe foſte come tanti , e tanti huomini , li quali dalla Geometria , aveano ricavato non ſolo la facoltà di conoſcere il vero , ma quella d' amarlo . Filotimo , biſogna ſopra la Geometria , e ſopra la Filoſofia formar non ſolo l'intelletto giuſto , ma la volontà retta , e divenir ſincero, ed onorato; lo che ſi ottiene accoſtumando ſe ſteſſo , a forza di lunghi abiti , e di piu , e più reiterati atti di vir-

virtù, a vincer quella ripugnanza, che la natura corrotta in noi ispira a confessar quel vero, che non lusinga i nostri sensi.

Fil. Farete voi Signor Doria lo stesso, se vi convincerò d'errore?

Dor. Certamente; e lo averei già fatto, se avessi veduto qualche ragione, la quale mi havesse d'errore convinto: perche alla perfine l'immagine di dover passare nella mente de' posteri, per huomo tanto ignorante, che non abbia inteso in Geometria un'errore, che mi è stato additato; o per poco sincero, che non abbia avuto cuore di confessarlo, mi spaventa, e mi atterrisce.

Fil. Eccomi già al vostro dire medesimo di mente sufficiente ad intendere; ed io vi dico altresì, che sono in tutto d'animo indifferente per confessar la verità, che m'insegnarete. Spiegatemi dunque di grazia il vostro Metodo?

Dor. Voi avete già tutte quelle qualità, ch'io addimando in un giudice delle mie proposizioni: e quelle in vero, che hanno molti altri a me ben noti, se un poco di timore di tanta folla d'oppositori non li arrestasse dal confessare il vero.

Fil. Ma questi meritano la taccia d'huomini non liberi, e di animo servile? Io però non sono della fatta di questi; perciò spiegatemi le vostre proposizioni.

Dor. Io vi hò veduto Filotimo mio così intelligente delle leggi, che si devono seguire nell'esame di una proposizione per la via sintetica dimostrata, che stimo superfluo il spiegarvi io medesimo il mio Metodo; e perciò voglio, che voi da voi stesso lo leggiate, e lo esaminiate qual rigorosissimo oppositore, ma però con mente indifferente, siccome vi hò detto. Leggete dunque il mio nuovo Metodo da me pubblicato l'anno 1715., ch'è quello, sù del quale i Signori Autori degl'atti han fatto quella relazione; e poi giudicate, se mai quel Metodo, qualunque egli sia, meritava che fusse

fusse riferito con quel disprezzo, col quale lo hanno riferito i sudetti Signori. Leggete dunque il mio Metodo a vostro bellaggio, perche io poscia penso di oppormi ancora a dirittura alla parabola piana; ed oltr' a ciò penso di fare alcune dissertazioni contro la Geometria di Renato des-Cartes, per mezzo delle quali dimostrazioni spero di far conoscere a i signori moderni geometri, quanto di leggieri si siano lasciati abbagliare dalle apperenti ragioni di quello, quando hanno ammesse le curve di Apollonio per linee geometriche: Tutte queste sì fatte cose, che andrò facendo, ve le inviarò sempre. Voi le studiarete con quel buon metodo, che a voi medesimo avete prescritto, e poscia quando ci vedremo insieme me ne appalesarete con sincerità il vostro giudicio.

Fil. In vero io non oso in una cosa, ch' è tutta nuova fidare al mio solo debole intendimento, e perciò vorrei, che vi degnaste. . . .

Dor. No Filotimo: noi, se ben vi ricordate, abbiam detto, che le cose nuove adombrano solamente le menti di quegli huomini, che non san ragionare, in altro modo, che per quello dell'abito, e ciò a cagione, che non hanno idea del vero in genere. Ma voi mi avete dato saggio d'aver in guisa formata questa idea del vero in genere, che potete francamente, e liberamente volgervi all' esame di qualunque particolare. Oltre che, quando si toglie dalla mente la larva, e dal cuore l'invidia, si trova, che le mie dimostrazioni sono facilissime, purche si voglia con retto metodo, e con un poco di riflessione studiarle. Studiate dunque Filotimo, e poscia ragionaremo.

Fil. Poiche così volete, io vi ubbidirò.

DIA-

DIALOGO IV.

Nel quale Filotimo propone le sue difficultà alle dimostrazioni dell' Autore, e da questo si risolvono; e si conclude il Dialogo ragionando intorno alle qualità dell' animo, che si devono avere; ed al metodo di studiare, che si deve seguire per giungere all' acquisto delle scienze.

Dor. OH quanto mi rallegro Filotimo di rivedervi dopo la vostra lunga assenza di più anni: dovete sapere, che dopo quei ragionamenti, che frà noi tenuti abbiamo intorno alla poca discreta relazione, che del mio nuovo Metodo pubblicato l'anno 1715. fecero i Signori Autori degl'atti di Lipsia; sempre a me è rimasto nel animo un vivo desiderio d' intender da voi il giudicio, che delle mie Opere matematiche avevate fatto, ed a tal fine io non hò mai tralasciato d' inviarvi tutte le scritture, che di mano in mano sono andato pubblicando. Vi hò inviata la Dissertazione da me fatta contro la nuova geometria di Renato des.Cartes. Vi hò inviata la Raccolta delle diverse dimostrazioni da me fatte a fine di provare, che la parabola Apolloniana non hà le proprietà, che se le assegnano. Vi hò inviate, oltre a ciò, le seconde risposte da me fatte alle obbiezioni de' Signori Autori degl' atti di Lipsia, i quali non sò come, avendo avuto notizia di quei ragionamenti, che insieme abbiamo tenuti intorno al mio Metodo, ed alla loro relazione, si sono opposti, co-

me voi avete veduto, alle mie dimostrazioni, ed hanno permesso, che 'l loro Relatore pubblicasse una dissertazione in difesa della sua mal intesa relazione.

Fil. Io spero aver profittato molto da vostri savij insegnamenti a me dati intorno all'essenza della Geometria, e intorno al metodo, col quale quella si deve studiare: Hò poi studiato attentamente tutte le scritture, che mi avete inviate.

Dor. Ora dunque appalesatemi da huomo sincero, qual siete, il vostro sentimento intorno alla mia invenzione?

Fil. La vostra Invenzione non può negarsi, che non sia ingegnosissima: e poi in una materia cotanto sublime, quanto è quella, che avete impreso a trattare, e nella quale si contiene la ricerca di un problema desiderato da tutti gl'antichi, e moderni geometri; che mai si potea dir di più ingegnoso di quel, che voi avete detto? Io per me ingenuamente vi confesso, che la vostra Invenzione mi hà arrecato non poca maraviglia; anzi di più vi dico liberamente, che mi è paruta in tutto temeraria la relazione, che ne han fatto li Signori Autori degl' atti di Lipsia; perchè in vero, dire intorno ad'un ritrovato così ingegnoso, qual'è il vostro, quelle inurbane parole: *Et hic quidem si quorumdam talis est novitas, quæ tam parum valeat &c.* un animo ben morigerato non può lasciare di non muoversi a sdegno contro un tal Relatore.

Dor. Gran mercè Filotimo del panegirico, che mi avete fatto; ma voglio altresì che sappiate, che questo non lusinga il mio genio. Non avete veduto, che 'l nostro Relatore vieta a geometri usare il coturno; lasciate dunque le inutili lodi, e ditemi a lettere di scatola, se riputate vere, ò pur false le mie dimostrazioni.

Fil. Questo che domandate, non è necessario, quando hò detto, che sono ingegnosissime; perche questo mi sembra, che basti: Io poi non mai ardirei di proporre difficultà in materia di Geometria ad un

un huomo della vostra fatta.

Dor. No Filotimo; non solo a me, del quale alcuni signori professori di Geometria sono andati spargendo, che son tanto buon metafisico, quanto poco esperto geometra; ma ad ogni gran maestro in Geometria qualunque discepolo non solo può, ma deve proponere le sue difficultà, dopò però, che hà fatto ogni diligenza per bene intendere una dimostrazione.

Fil. Signor Doria? Pitagora voleva, che i suoi discepoli ascoltassero senza parlare; e Socrate rispondeva a quei discepoli, li quali ad esso facevano qualche difficultà in Geometria, colle saguenti parole: Studiate, ed intenderete. Or io voglio usar con voi come quei discepoli di Pitagora, o di Socrate.

Dor. Quei gran maestri, che voi avete nominati, avean ragione di usare quel modo co' i loro discepoli, perche volevano, che quelli s'accostumassero a svilupparsi da lor medesimi dalle difficultà, che incontravano; e che in questa guisa si accostumassero a bene intendere da lor medesimi le dimostrazioni, e formassero una mente dotata di un certo, e sicuro raziocinio. Volevano, che i loro discepoli riflettessero, e profondamente meditassero sù di quelle proposizioni, che i loro maestri gl' insegnavano, e non volevano, che nell' ascoltare una proposizione la lor mente corresse precipitosamente a pensare alla risposta, prima di aver ben meditato intorno al vero, o al falso di quello, che 'l lor maestro gl' avea proposto, e che aveano ascoltato: difetto gravissimo di molti huomini. Alla perfine Socrate, e Pitagora non volevano, che i loro discepoli divenissero perniciosi sofisti; ma dopò che per lo mezzo della meditazione nel silenzio fatta erano divenuti bene abituati nel perfetto raziocinio astratto, gli permettevano la licenza di opponere, anche a i lor maestri; e per dirla in breve volevano, che i giovani prima imparassero a pensare, e poi a parlare. Così dunque Filotimo mio, quei saggi mae-

ſtri, li quali non avevano per fine l'ingannare i loro diſcepoli, ponevano tutto il loro ſtudio a rendergli ſufficienti a diſtinguere con ſicurezza il vero dal falſo. Ma a noſtri tempi ad altro non ſi bada, ſe non che a preparar la ſapienza in leggieri, e delicati cibi, per modo, che niente diſguſti il palato, ne gravi lo ſtomaco de' giovani; e ſe altri poi dice, che queſti sì fatti cibi non poſſono alcuno ſuſtanzial nutrimento appreſtare alla mente; queſto tale vien trattato da ſtravagante, ed importuno: biſogna uſare in altro modo con i diſcepoli Filotimo mio; ma voi non ſiete diſcepolo, perche ſiete iſtrutto quanto ſi conviene nella Geometria ſintetica, e nel metodo degl' indiviſibili, ch' è quanto ſi richiede per l'intelligenza della mia Invenzione. Appaleſatemi dunque il voſtro giudizio intorno alla mia Duplicazione del cubo.

Fil. Signor Doria mio, potrebbe avvenire, ch' io prendeſſi un qualche abbaglio, e che voi ſubbito montaſte in collera contro di me.

Dor. V' intendo, v' intendo Filotimo; voi ſiete giuſtamente caduto in quelle inviſibili reti, che alcuni malizioſi maeſtri, e miei oppoſitori tendono a i loro diſcepoli per far sì, che queſti non ſtudijno la mia Invenzione, e che non poſſano, ſtudiandola, avvederſi delle falſe dottrine, che quelli inſegnano; mi reca maraviglia la voſtra ſoverchia credulità Filotimo. Io altro non amo, che la verità, e non ſolo aſcolto i voſtri avvertimenti, ma quelli ancora d' ogni fanciullo; e quelli, che ben mi conoſcono, ne poſſono far fede: Dite; dite dunque liberamente il voſtro ſentimento, e ſiate pur ſicuro, che la noſtra amicizia a cagione delle voſtre difficultà non ſolo non ſi diminuirà, ma diverrà maggiore.

Fil. Poiche cotanto m' affidate, vi narrerò il giudicio, ch' hò fatto del voſtro Metodo.

Dor. Ma acciò io poſſa conoſcere il profitto, che avete fatto intorno al modo, col quale io vi hò inſegnato,

che

che si debba esaminare una proposizione geometrica, narratemi la prima proposizione della Raccolta nel modo, ch' io vi hò prescritto.

Fil. Vi ubbidirò; ma per seguire il buon ordine, prima vi narrerò il giudicio, che hò fatto della vostra Dissertazione fatta contro la geometria di Renato des-Cartes.

Dor. Ottimamente avvisate; dite pure.

Fil. Mi sembra, che chiunque con animo indifferente, e sincero legga la vostra Dissertazione, non possa tralasciare di porsi almeno in dubbio intorno a quella proposizione, che asseriscono i moderni cioè, che le curve d' Apollonio, le parabole di grado superiore, e tutte le altre curve da' signori moderni geometri pensate, abbino a similitudine del cerchio, e quanto il cerchio medesimo le proprietà, ch' essi le assegnano; e che abbino le tali proprietà, quantunque non si possano esattamente descrivere: In vero in quella Dissertazione ingegnosissimo è il modo, col quale voi impugnate quelli argomenti, co i quali Renato des-Cartes nel principio del secondo libro della sua geometria si è affaticato di provare, che gli stromenti più composti sono valevoli a far conoscere le proprietà geometriche, niente men che 'l compasso, e la riga. E quella similitudine, che portate di Platone con un rozzo Lapone per additar la differenza di esattezza nel costruire, che voi pensate, che sia frà il compasso, e gli stromenti di moti composti, mi è paruta dignissima. Hò ammirato ancora il modo, col quale voi ponete dalla vostra banda tutt' i geometri antichi, facendo conoscere, che quelli non han mai creduto le curve d' Apollonio avere esattamente le proprietà, che da esso se le assegnano: E in vero anco il Signor des-Cartes confessa, che gl' antichi geometri non tennero l'accennata sentenza, mentre li taccia del difetto di soverchio scrupolosi, a sola cagione, che han ricusato di ricever le curve d'Apollonio per linee

geo-

geometriche, e non si sono affaticati, come aurebbero potuto fare, a proseguire, ed ampliare la vastissima dottrina delle curve. Quello poi che dite contro il P. Malebrance, il quale senz'alcuna pruova ha tacciati del difetto di visionarij tutti quelli, che si affaticano per ritrovare la quadratura del cerchio, o la duplicazione del cubo, mi è paruto in tutto conforme alla ragione; e mi hà sopra ogn'altra cosa dilettato quell'esempio de' libri ritrovati nell' arca di Numa Pompilio, del quale vi servite per additare il troppo gran scompiglio, che farebbe la vostra Invenzione nella moderna litteraria repubblica, se fusse da' matematici ricevuta; donde poi asserite, che ne venga per conseguenza quella renitenza, che, al vostro dire, mostrano i signori moderni geometri a confessar come vera, e ben dimostrata la vostra Invenzione.

Dor. Ma ditemi un poco; quelle ragioni dedotte dalla natura, e dall' essenza della Geometria, le quali io hò addotte nella Dissertazione, non vi hanno a bastanza persuaso dell'errore, nel quale son' caduti i signori geometri seguaci di Renato? Non hò io colà provato a bastanza, che la parabola non hà, com'essi dicono, le proprietà, che le assegnano dell' istesso modo, che'l cerchio hà le proprietà, ch'Euclide dimostra?

Fil. Se io considero attentamente il valore delle ragioni degl'argomenti da voi addotti, mi sembra, che abbiate ragione; ma poi quando vedo un intero mondo de' matematici, che a voi si oppone, si sveglia in me un timore d'errare, la vostra sentenza approvando: E in vero Signor Doria mio, il vedere un Renato des Cartes, il quale oggi dì hà dato le norme, e la regola della buona Filosofia, per modo tale, ch'ora considerano Platone, Aristotele, e gl' altri antichi filosofi, a guisa d' huomini, che sono stati di mente oscura, e confusa, e che non han veduto chiaramente dentro i profondi secreti della natura. Il vedere dico, un sì fatto huomo, il quale asserisce, che gl' antichi ne men han ve-

veduto chiaramente nella Geometria; non posso negarvi, che ciò fà nella mia mente molta autorità: E poi il vedere, che tutti i moderni geometri hanno abbracciata con plauso, e seguita senza menoma eccezzione la sentenza di quel grand'huomo; e che in consequenza di ciò hanno tutta la lor mente applicata ad ampliar la dottrina delle curve; e che l'hanno dî modo ampliata con un numero quasi infinito di libri, e di nuove invenzioni, per modo tale, ch'oggi il Mondo vanta molta superiorità sopra la scienza degl'antichi in ciò, che riguarda le Matematiche: Vi dico il vero Sig. Doria, che mi rende renitente a voler io solo decidere contro una sentenza da tutti approvata, fuor che da voi.

Dor. Di grazia Filotimo, se mai vi venisse in mente di viaggiare, non andate in paesi de' maomettani, vedete?

Fil. E perche?

Dor. Perche vedendo voi parte dell'Europa, una gran parte dell'Asia, e quasi che tutta l'Africa seguir la falsa setta di Maometto; e vedendo, che i maomettani sono in numero assai maggiore, che i Cristiani, sareste in pericolo di divenir maomettano. Oh Filotimo! adunque nella vostra mente l'errore comune hà forza di legge? e come avete così tosto obbliati quei precetti, che conducono a conoscere, ed a seguir la ragione intima, i quali vi hò dati negli altri ragionamenti, che insieme tenuti abbiamo? Ma poscia quando anche io volessi permettervi nelle cose geometriche di lasciarvi in qualche parte muovere dall'autorità; l'autorità degl'antichi geometri, come sono un Archimede, un Pappo Alessandrino, e tanti, e tant'altri, fà così poca forza nella vostra mente, che la posponiate all'autorità di Renato, e di una moltitudine de' suoi seguaci? Ma io vi dirò di più, anco frà i moderni il celebre Francesco Vieta è dalla mia banda, perchè hà impugnate ancor esso le curve.

Fil. Voi avete bel dire; ma vedete un poco quanti ama-

ri.

ri bocconi siete costretto a soffrire per esservi voluto alzare contro tutti? e vedete, se gl' Antichi, e Vieta sono sofficienti per difendervi contro le persecuzioni di tanti geometri, quanti sono i seguaci della geometria di Renato?

Dor. Ah Filotimo! se voi nutrite nell' animo sentimenti di viltà, cessiamo per sempre di ragionar insieme. A che mai vale un huomo, che professa sapienza, quando non hà il coraggio di confessar il vero, che conosce? è egli altro, che un vile, il quale dalla viltà è costretto a far passaggio all' abominevole vizio della calunnia, e dell'impostura?

Fil. Oh Sig. Doria perdonatemi, non si parla in questa guisa degl' huomini di lettere. Dobbiam più tosto credere, che se la vostra Invenzione è vera, e ch' essi non la confessano, ciò avvenga, perche non l' intendono; ma non mai si dee dire, che intendendola, tralascino maliziosamente di confessarla.

Dor. Io hò parlato in questa guisa contro di voi Filotimo, che mi avete chiaramente detto un sentimento, che sente di viltà: Nel rimanente poi io mi dò a credere come voi, che i sign. moderni geometri non intendono la mia Invenzione. Potrebbe però avvenire, che usassero in questa mia Invenzione, per non guastare le cose loro, la prudenza, che, come hò detto, usò il Senato Romano, per non confondere il sistema di Roma, allora quando si trovorono gl' accennati libri nell'arca di Numa. Comunque la cosa sia però, quel mancamento di sincerità, che negl' huomini vulgari è difetto, negl' huomini di lettere è gravissima colpa.

Fil. Oh gravissima colpa, bisogna Sign. Doria essere alquanto più discreto; l'amor proprio non si può sradicare dal cuore degl'huomini, e per ciò se in consequenza della vostra Invenzione si rendono, come voi dite, vani, ed inutili le invenzioni, e gli studij di una gran parte de' moderni; perche non vorrete compatirli, se non confessaranno così agevolmente il lor errore?

Pa-

Palinodiam canere difficile est.

Dor. No Filotimo; negl' huomini savij è sempre grave delitto la renitenza a confessare il proprio errore; perche questo è lo stesso, che declinare dalla sincerità per ostentare l' infallibilità; ed è, come vi hò detto, gravissima colpa in chi professa lo studio della sapienza: ma poscia per qual ragione voi dovete lasciar d' esser sincero? forse perche avete studiato l' Algebra, e i nuovi Metodi de'moderni? Siete dunque così avaro di un poco di tempo, che avete speso in quei perniciosi studij, che vi rincresce di confessare d' averlo perduto, e di rinunciare ad una vana scienza? Voi Filotimo se conoscete vera la mia Invenzione, dovete appunto dire, come disse un Santo Padre, del quale ora non mi sovviene il nome, nel tempo, che la setta d' Arrio era seguitata quasi che da tutto il Mondo cristiano.

Fil. E che disse?

Dor. Disse: *Totus ferè Mundus Arrianus est; ego tamen Christianus sum.*

Fil. Ma Signor Doria mio, io non hò ancora peccato contro la sincerità, perche voi non sapete ancora qual giudicio abbia fatto della vostra Invenzione geometrica; io non vi hò narrato altro, che la Dissertazione.

Dor. Or bene: Ditemi dunque il giudicio, che avete fatto intorno alle dimostrazioni, che avete lette nella Raccolta.

Esame dell' opera dell' Autore.

Fil. Voi nella prima proposizione della vostra Raccolta vi affaticate di dimostrare per la via positiva, o sia a priori, come si suol dire, che'l luogo delle infinite radici intercette fra 1, e 2 &c. è alla vostra linea retta CE, tirata per i punti estremi delle applicate BC1, e DE2 fatte per costruzione. Or que-

Tav. I. Fig. I.

sta proposizione, come che è la prima, ed è quella, nella quale voi vi affaticate di dimostrare a priori il vostro assunto, io l' hò esaminata con quelle leggi, che voi mi avete prescritte.

Dor. Dite dunque.

Fil. Alla proposizione non mi sembra, che possa alcuno oppositore dire cosa in contrario; perche se mai volesse dire, che la proprietà d' Apollonio è cosa dimostrata, come le proposizioni d' Euclide, e che perciò non si dee esaminare; voi avete a bastanza dimostrato nella vostra Dissertazione, di avere impreso a provare una cosa, la quale era necessario, che si esaminasse. Nella costruzione poi voi altro non ordinate, se non che si tirino linee rette da punto a punto, e che s' intenda divisa la BF in parti infinite; questo è in tutto legitimamente fatto. La dimostrazione poi voi la dividete ne' cinque seguenti argomenti. Nel primo provate, che BC unità è radice di AB unità, e che DE2 è radice di AD4: questo è vero per costruzione. Nel secondo dite, che i quadrati intercetti frà BC1, e DE2 sono in proporzione aritmetica, e che i quadrati infiniti intercetti frà AD4, ed AF9 ancora sono in proporzione aritmetica: questo è vero, perchè avete supposto la BF divisa in punti, o parti infinite Nel terzo voi asserite, che le infinite parallele intercette frà BC1, e DE2, le quali terminano alla retta CE, sono in proporzione aritmetica; questo è vero, perchè sono nel triangolo KDE. A questo argomento però mi nacque nella mente un picciol dubbio, e fù, che avendo voi ordinato, che s' intenda la BF divisa in punti, o parti infinite, i punti della BD non potessero essere infiniti.

Dor. Io posso considerare come infiniti i punti della BD, e come infiniti i punti della BF; perchè le due linee AB, ed AF sendo lati di due diversi triangoli, come potete vedere nella Fig.V. della Tav.I. io posso ambedue supponerle divise in parti infinite; e se questo volete

lete vederlo più ampiamente provato, leggetelo nella Raccolta, e nella seconda Risposta da me fatta alli Signori Autori degl' atti; intendo dunque la BD divisa in punti infiniti: proseguite ora l' esame dell' altre illazioni.

Fil. Nel quarto voi supponete come prima, che le parallele intercette fra BC1, e DE2, le quali terminano alla retta CE siano infinite; e da ciò ne deducete, che la somma di tutte le radici de' quadrati intercetti frà AB1, ed AD4 si contenga nel vostro Rettilineo BCDE, il quale è porzione del triangolo KDE. A questo argomento stiedi per dire, che voi supponete quello, ch' è *in quæstione*; perche i seguaci di Renato suppongono, che la somma delle radici degl' infiniti quadrati intercetti frà AB1, ed AD4 si contenga nelle applicate, che terminano al perimetro della parabola Apolloniana. E in vero tanto le applicate, che terminano alla curva, quanto le vostre parallele, che terminano alla retta sono nei limiti di BC1, e DE2. La conclusione poi, quando sia vera questa illazione, è verissima. Ora, come vi hò detto, leggendo questa dimostrazione dubbitai della quarta illazione; ma poscia vedendo, che in appresso vi affaticate di dimostrare il vostro assunto in moltissimi altri modi, non badai più alla prima vostra dimostrazione.

Dor. Oh Filotimo! la prima mia dimostrazione è verissima, e sappiate, che quella sola sarebbe stata sufficiente a provare il mio assunto; e in tanto hò fatto le altre dimostrazioni, che sieguono nella Raccolta, in quanto che hò considerato, che trattandosi di una materia, nella quale tutte le menti de' moderni sono prevenute del contrario, bisognava dimostrarla ancora in qualche modo più sensibile, che non è quello, che nasce dalle dimostrazioni fatte per il metodo degl'Indivisibili, il quale è un metodo astratto; e bisognava far si, che a forza di molte dimostrazioni i sign. matematici abituassero la lor mente ad una verità, che

ripugna al loro senso, ed alla lor passione ?

Fil. Spiegatemi dunque in un modo più acconcio alla mia corta intelligenza la vostra quarta illazione ?

Dor. Ditemi un poco Filotimo; AB1, ed AD4 sono quadrati per costruzione ?

Fil. Certo che sì.

Dor. E tutte le porzioni intercette frà AB1, ed AD4 non sono ancora quadrati ?

Fil. Certamente.

Dor. E perche sono quadrati ? non per altra cagione, se non perche frà AB1, ed AD4 vi si contiene tutta la somma possibile delle differenze, che possono essere frà i quadrati delle infinite radici intercette frà BC1, e DE2. Dell'istesso modo vedrete ora, che nelle infinite parallele, le quali terminano alla retta CE, vi si contiene la somma delle radici de i quadrati intercetti frà AB1, ed AD4.

Fil. Di grazia...

Dor. BC1, e DE2 sono radici de i quadrati AB1, ed AD4 ?

Fil. Certamente, e lo sono per costruzione.

Dor. E le radici intercette frà BC1, e DE2 non sono in proporzione aritmetica ? non sono infinite, e non sono tante, quanti sono i punti della BD ?

Fil. Certo che sì.

Dor. Adunque nelle infinite intercette frà BC, e DE vi sarà la somma di tutte le differenze, che posson essere frà BC, e DE ?

Fil. Certo che sì.

Dor. Ma BC, e DE sono radici per costruzione de i quadrati AB1, ed AD4: Dunque nelle infinite parallele intercette frà BC1, e DE2, le quali terminano alla retta CE, vi si contiene la somma di tutte le differenze, che posson essere frà le radici BC1, e DE2, che vale a dire, frà le radici de i quadrati intercetti frà AB1, ed AD4. Ma se nelle parallele intercette frà BC1, e DE2 vi si contiene la somma di tutte le differenze, che posso-

poſſono eſſere frà le radici de i quadrati intercetti frà AB1, ed AD4; vi ſi contiene ancora neceſſariamente la ſomma di tutte le radici de i quadrati intercetti frà AB1, ed AD4: ma ſe è così quelle quantità, che ſono di più nelle applicate, che terminano al perimetro della parabola, cioè le differenze frà le noſtre parallele, che terminano alla retta, e le applicate, che terminano alla curva, ſono ſuperflue alle radici, e perciò ſi devono nomare eccesſi. Ed acciò queſto lo vediate più ſenſibilmente; oſſervate alla pag. 43. delle riſpoſte da me date alle obbiezioni de' Sign. Autori degl' Atti di Lipſia, e vedrete, che le differenze frà le mie parallele, e le applicate all' aſſe della parabola Apolloniana, come ſuperflue. ſvaniſcono. Ora che dite Filotimo?

Fil. Io rimango attonito, ne sò che riſpòndere; ma....?

Dor. Vedo bene Filotimo, che la voſtra mente non è gionta a tal ſegno di perfezzione, che ſi laſci ugualmente ſtringere, e convincere da una dimoſtrazione puramente aſtratta, che da una dimoſtrazione appoggiata a ſenſibile coſtruzione, come ſono le dimoſtrazioni d' Euclide; e non avete ancora acquiſtata quella perfezione d' intendere, ch' una coſa ſi dee ricever per vera, ſempre che ſi conoſce in virtù della dimoſtrazione ancorche aſtratta, eſſer neceſſario, che la coſa ſia nel modo, che ſi propone. Queſta è la perfezione, la quale è neceſſario, che la mente acquiſti, ſe vuol giungere alla conoſcenza delle verità pure metafiſiche. Ma giacche la coſa è così; ditemi un poco il giudicio, che avete fatto delle altre mie dimoſtrazioni contenute nella Raccolta, perche quelle ſendo piu ſenſibili ſpero, che avranno più la voſtra mente appagato.

Fil. Farò dunque l' eſame delle altre dimoſtrazioni?

Dor. No, perche in ciò che ſi attiene al metodo di eſaminare una dimoſtrazione, mi avete dato baſtante ſaggio di ben intenderlo. Ditemi ora in breve il giudicio, che di quelle dimoſtrazioni a parte a parte avete fatto.

Fil.

Tav.I. Fig.I.

Fil. Nella seconda dimostrazione pag. 6. voi vi affaticate di dimostrar lo stesso, che avete dimostrato nella prima, ma più sensibilmente; mostrando, che le radici infinite devon essere o in proporzione aritmetica, ovver una maggiore dell'altra, ma eccedersi con differenze una sempre minore dell'altra; e da ciò ne deducete, che nel primo caso il luogo delle radici è la vostra linea retta CE; e nel secondo, che non si potrebbe mai giungere ad intender costruita l'applicata DE2: E per far veder questo sensibilmente dite, che se HO, la quale termina fuori della retta CE fusse radice di AH, SQ sarebbe ancora radice di AH; e proseguendo sempre a tirare le vostre perpendicolari OQ, 15N &c. pretendete mostrare, che se le applicate una maggiore dell'altra, le quali terminano fuori della retta CE, si eccedono con differenze l'una minore dell'altra; la retta CE, e la BD porzione dell'asse AD, verrebbero divise in parti una sempre minore dell'altra; e che per ciò non si potrebbe mai descrivere, ne intender descritta l'applicata DE2: onde ne nascerebbe l'assurdo contro l'ipotesi d'Apollonio, il quale vuole, che da ogni punto dell'asse si possa descrivere un applicata, la quale sia mezza proporzionale frà il parametro, e l'ascissa: questa è la vostra prima proposizione. Alla proposizione poi, che si legge alla pag. 8. pretendete dimostrar lo stesso per la via de' limiti, perche dite, che le applicate infinite intercette frà CB1, e DE2 non si possono eccedere frà esse con altre proporzioni, che con le tre seguenti, cioè; o in proporzione aritmetica, o in una porzione maggiore dell'aritmetica, cioè, che la differenza frà la terza LM, e la seconda HI sia maggiore della differenza frà la seconda HI, e la prima BC; ovvero nella terza specie di proporzione, che è quella, colla quale le infinite applicate una maggiore dell'atra si eccedono frà esse con differenze una minore dell'altra. Alla prima supposizione dite di nuovo, che il luogo delle infinite radici è la vostra retta CE:

CE; in conſequenza della ſeconda ſuppoſizione penſate dimoſtrare, che un'applicata delle intercette terminarebbe ſopra il punto D, come per eſempio nel punto X; ed alla terza ſuppoſizione dite di nuovo, che la parabola non ſi potrebbe intender ripiena d' infinite applicate, ciò che ripugnarebbe all' ipoteſi d' Apollonio. Fate poi due belle conſiderazioni; e nella prima di eſſe fate vedere ſenſibilmente con numeri quello, che voi penſate aver dimoſtrato in linee: E qui devo dirvi un certo mio penſiero, ed è; che quando leſſi la prima volta queſti voſtri eſempj in numeri dubbitai, che aveſte voi penſato, che ſi poteſſero eſprimere in numeri le radici intercette fra BC1, e DE2: Ma poſcia mi avviddi, che alla pag. 28. della medeſima Raccolta voi eſpreſſamente dichiarate, e dimoſtrate, che le radici intercetre frà BC1, e DE2, e i quadrati intercetti fra AB1, ed AD4 ſono irrazionali; laonde conobbi, che quei numeri l' avevate ſolamente portati a fine di dare un' eſempio ſenſibile della voſtra dimoſtrazione, e non già, che penſaſte, che quei numeri ſpiegaſſero il valore delle radici.

Dor. Voi avete Filotimo ottimamente formato l'idea compleſſa delle mie dimoſtrazioni; con tutto ciò però ragionate ſempre da ſcettico: temeſte forſe, ch' io vi voleſſi per approvatore? Non dubbitate no, ch' io non vado mendicando approvatori.

Fil. Sò bene, che poco v' importa la mia approvazione; e poi io non ardiſco approvare, perche conoſco non eſſer huomo da tanto.

Dor. Or via non torniamo da capo: Proſeguite a narrarmi l'idea, che delle altre mie dimoſtrazioni avete fatto.

Fil. Dalla pag. 12. ſino alla pag. 34. voi fate alcune ingegnoſiſſime conſiderazioni intorno a gl' errori, che prendono coloro, i quali dalle propoſizioni dimoſtrate, o che ſi ſuppongono dimoſtrate, in vece di eſaminarne la dimoſtrazione, s'ingegnano di provare,

che

che ne nasca assurdo ; e per confermar ciò coll' esempio , voi fate a voi medesimo due opposizioni per la via dell' assurdo , cioè . Nella prima voi prendete la mezza proporzionale frà KB , e KD , ed asserite, fingendo d' opponere a voi medesimo, che le mezze proporzionali devono cadere in diversi punti dell' asse AD. Ma poscia rispondendo per lo mezzo di un calculo numerico fate assai ben conoscere, che prendendo sempre le mezze proporzionali frà AB, e le ascisse dell'asse ; e frà KB , e le porzioni de' lati di KD , nell' infinito le mezze proporzionali fra 'l parametro , e le ascisse , e frà le porzioni de' lati del triangolo , cadono in un medesimo punto dell' asse ; di poi concludete, che lo stesso assurdo asserito dall' oppositore si sarebbe ritrovato nella parabola Apolloniana, come si vede nella Fig.VI. Il secondo assurdo,che proponete a voi stesso, è alla pag.29., ove calculate in numeri le parallele intercette frà BC, e DE, considerandole come lati de' triangoli simili , e fate la seguente analogia cioè ; come SB3 a BC1 , così SN4 , e trovate, che la parallela segnata N8 sarebbe $1 \frac{1}{3}$; indi concludete l' assurdo, e dite, che il prodotto di $1 \frac{1}{3}$ è $1 \frac{7}{9}$, e che per ciò la parallela N8 non può esser radice dell' ascissa AN , doppia del parametro , o sia unità AB : Queste sono le opposizioni , che voi fate a voi medesimo.

Tav.I. Fig.III.

Tav.I. F. IV.V., e VI.

Dor. E bene, non vi sembra rigoroso l'esame, che hò fatto a me medesimo ? E vi par' egli , che s' io avessi ritrovate in qualche cosa mancanti le mie dimostrazioni , mi sarei impegnato a sostenerle ? Credetemi Filotimo , ch' io per ritrattarmi hò studiato assai più , che i miei contrarii medesimi , non hanno studiato per far veder false le mie dimostrazioni.

Fil. Oh! della vostra sincerità non hò mai dubbitato : ma se devo dirvi sinceramente il vero , questa seconda opposizione mi fece nel principio un poco di forza nella mente , perchè non poteva io intendere , co-

me

me la parallela N8 nella fig. IV. confiderata come parallela posta nel triangolo SDE, si potesse esprimere in numeri; e che considerata come radice fusse irrazionale.

Dor. Mi reca maraviglia Filotimo il motivo, che voi mi fate, perchè se aveste ben considerato quello, ch', io hò detto nelle risposte da me fatte alle obbiezioni de' Sign. Autori degl' atti, sareste in tutto rimasto soddisfatto della mia risposta.

Fil. Rammentatemi di grazia quel, che avete detto, acciò io possa conoscer quello, che per mancamento di ben riflettere, non hò potuto intendere.

Dor. In quelle risposte dalla pag. 57. fino a 61 io hò dimostrato chiaramente, che ne i quadrati intercetti frà 1, e 4; e nelle radici intercette frà 1, e 2, i numeri successivi, come 2, 3, &c. non corrispondono alle linee, e lo stesso de' quadrati intercetti frà 4, e 9, e delle radici intercette frà 2, e 3, e così sempre. Ora qual maraviglia vi reca, che la parallela N8 nel triangolo SDE sia uguale ad $1\frac{1}{3}$ in numero, e con tutto ciò considerata nell' asse non sia radice in numero del quadrato 2? Per primo AN non è quadrato 2, perche, siccome io hò dimostrato, il quadrato 2 non cade nel punto N, ma cade sotto il punto N; e ciò a cagione, che il grave si accelera sempre, ed uniformamente in ogni punto dell' asse AD; dunque la parallela N8 sarà 1 e $\frac{1}{3}$ a riguardo de i lati BC, SB, ed SN lati de i triangoli simili; e con tutto ciò 1 e $\frac{1}{3}$ non sarà radice del quadrato 2.

Fil. Ma questi son paradossi difficili ad intendersi Sign. Doria mio?

Dor. Difficili si a chì non sà far le distinzioni, che sono necessarie a farsi in Geometria.

Fil. Ma ditemi un poco; AN non è doppia di AB?

Dor. Certo che sì

Fil. AB non è 1?

Dor. Certamente.

 Fil. Dun-

Fil. Dunque AN doppia di 1 ſi chiama 2 in buona aritmetica, ed in buona lingua toſcana.

Dor. Si chiama 2 in buona lingua toſcana, ma non ſi chiama 2 in buona lingua geometrica

Fil. E perchè?

Dor. Perche li quadrati, e le radici AB, AN, BC, e N8 conſiderate nella duplicata, e nella ſubduplicata proporzione hanno frà eſſe una proporzione diverſa da quella, che SB, BC, SN, ed N8 hanno nella proporzione ſemplice, che è quella, quando ſi conſiderano ne' triangoli ſimili; e perciò per la IV. del VI la parallela N8 può eſſere 1 e $\frac{1}{3}$ a riguardo di BC, e de i lati SB, e SN; e nello ſteſſo tempo la parallela N8 in linea può eſſer radice irrazionale del quadrato AN per l' XI. del VI.

Fil. Dunque N8, che eſſenzialmente è 1 e $\frac{1}{3}$, ed è radice in numero di 1 e $\frac{7}{9}$, ſarà anche radice di AN 2?

Dor. Voi fate come gl' altri miei Oppoſitori, i quali non vogliono a patto veruno ſtare sù la mia ipoteſi; Non vi hò detto, che AN conſiderata per aſſe non è 2?

Fil. Lo avete detto certamente; ma....,

Dor. E potete dubitare di ciò, quandò vedete, che prendendoſi AN per aſſe, il numero 2 non corriſponde al punto N, ma ad un punto, ch' è ſotto il punto N? e ciò perchè il grave accelerandoſi uniformamente in ogni punto degl' intercetti frà AB, ed AN deſcrive ſpazii uno ſempre maggiore dell' altro, i quali ſpazii non corriſpondono a i momenti di tempo uguali; adunque 2 non corriſponde ad AN, ma corriſponde ad una porzione dell'aſſe, che cade ſotto il punto N; e perciò la radice di 2, la quale non ſi può trovare altro, che in linea, ſi trova ſotto il punto N: ma per darvene un eſempio ſenſibile. Figuratevi, che un grave, il quale camini di moto equabile, abbia in trè momenti di tempo ſcorſa la SB, e in quattro momenti di tempo la SN; e che un'altro grave in un momento di tem-

tempo abbia scorsa la BC; e che un altro, il quale corra coll' istessa velocità di moto equabile, abbia scorso la parallela N8: questi gravi auran'generati i triangoli simili SBC, SN8; perchè i momenti di tempo saranno uguali alle linee, che percorrono i gravi; e perciò la parallele N8 sarà 1 $\frac{1}{3}$. Figuratevi poi un' altro grave, il quale cada di moto uniformemente accelerato per l'asse AB in quella guisa, che suppone Galileo; i numeri, che in questa ipotesi additano i spazii, che percorre il grave, che cade di moto accelerato, non possono corrispondere giustamente a i numeri successivi 2,3, &c., e perciò non possono ne men corrispondere a i spazii, che percorrono i gravi, che cadono per i lati de' triangoli simili.

Fil. Questo, certo che nò.

Dor. Dunque il numero due non corrisponde al punto N; ed il quadrato 2 cade sotto il punto N.

Fil. Ma io non posso giammai intendere, come il doppio di 1 possa non esser 2.

Dor. Già vi siete adombrato di mente: di grazia non v' impegnate, perchè se v' impegnate, entrerà in voi ancora la vanità di non volervi ritrattare, e vi ostinerete nella vostra proposizione.

Fil. Oh! di questo non dubbitate; io son huomo sincero, e indifferente.

Dor. Or dunque io voglio dimostrarvi il mio assunto per altra via: Voi volete, che AN sia il quadrato 2, e che la parallela N8 non possa esser radice di 2 solamente, perche 1, e $\frac{1}{3}$ è numero, il quale moltiplicato in se stesso non fa 2. Non è così?

Fil. Certo che sì.

Dor. Ma se è così, secondo la vostra medesima ipotesi, la radice di AN non si trova nel punto N.

Fil. E perchè?

Dor. Perche tutt'i numeri intercetti frà 1 $\frac{1}{3}$, e 2 sono tutte unità coll'aggiunta di frazzioni: Ma voi sapete, che l' unità coll' aggiunta di frazzioni moltiplicate in lor

medesime non possono mai fare un numero intero. Adunque niuna applicata di quelle, che cadono nel punto N potrà essere radice di AN; e perciò nel punto N, non vi cade la radice di AN, che voi chiamate 2. Ma se è così, vi bisognerà confessare, che i numeri, che trovate per la via de i triangoli, non spiegano le potenze delle radici.

Fil. Mi resta ancora di dirvi una cosa, ed è, che molti numeri ritrovati per la via de i triangoli spiegano le potenze delle radici; ed ecco come. Se la parallela N8 è 1 e $\frac{1}{3}$, l'ascissa AN sarà 1 e $\frac{7}{9}$ Adunque secondo la vostra ipotesi la parallela N8 spiega la radice del quadrato AN; ma il quadrato AN sarà 1 e $\frac{7}{9}$, e non 2

Dor. Voglio concedere, che nelle parallele, le quali sono mischiate di frazzioni, si possano trovare, per la via de i triangoli, de i quadrati, che siano unità mischiate di frazzioni, ma questo non ripugna alla mia proposizione, anzi la confirma.

Fil. E come?

Dor. N8 è 1 e $\frac{1}{3}$, AN è 1 $\frac{7}{9}$; adunque il quadrato 2 cade sotto il punto N: Perche se N8 è radice di 1 e $\frac{7}{9}$, la radice di 2 cade certamente in un punto sotto il punto N: ma se cade in un punto sotto il punto N, la radice di 2 non può terminare in altro luogo, che alla mia retta CE; perche la differenza frà la radice di 1 e $\frac{7}{9}$, e la radice di 2 sendo insensibile; e la parallela, che cade sotto il qunto N, sendo maggiore della parallela N8, necessariamente la radice del quadrato 2 cadrà nella mia retta CE.

Fil. Se fusse questo che voi dite, tutte le radice termineerebbero alla vostra retta CE; perche voi date per supposto, che N8 sia radice di AN, e che il quadrato AN sia 1, e $\frac{7}{9}$.

Dor. Siete voi, che avete trovato per i triangoli simili, che AN è 1 e $\frac{7}{9}$, e che poi volevate, che corrispondesse al numero 2 sù l'asse; io poi vi hò provato, che AN

non

non corrisponde al numero 2: dunque sempre ch' io hò provato, che AN non corrisponde al numero 2; necessariamente la parallela N8 sarà 1 e $\frac{1}{3}$; il quadrato AN 1 e $\frac{7}{9}$; la parallela, che cade sotto il punto N, è radice irrazionale di 1; e voi stesso avete fatta la dimostrazione alla mia proposizione.

Fil. Non saprei qual numero assignare al quadrato AN; perche una volta, che non è 2, sarà 1 e $\frac{7}{9}$; e se è così, voi avete ragione.

Dor. Voglio io medesimo ajutarvi. Vorreste forse porre per ipotesi, che il quadrato di AN fusse una quantità maggiore di 1 $\frac{7}{9}$, e minore di 2 per modo, che la sua radice uscisse fuori della retta CE per una qualche minima quantità? Ma in questo caso la radice di 2 caderebbe sempre alla mia retta CE; perchè la differenza frà la radice del quadrato maggiore di 1 e $\frac{7}{9}$, ed il quadrato 2, essendo ancora minore della differenza frà il quadrato 1 e $\frac{7}{9}$, ed il quadrato 2; sempre la radice del quadrato 2 non potrebbe cadere in altro luogo, che in un punto della retta CE immediato sotto il punto 8. Or vedete Filotimo, come ogn' opposizione serve di nuova pruova alla mia Invenzione. Io vi hò provato, che 'l quadrato 2 cade sotto il punto N; lo che è certissimo, perche se ciò non fusse, la duplicata proporzione, e la semplice sarebbe l' istessa: E poi vi hò provato, che se il quadrato 2 cade sotto il punto N, necessariamente la radice del quadrato 2 non può cadere in altro luogo, che alla retta CE. Credete a me Filotimo: Alle proposizioni dimostrate non si possono trovare assurdi nò.

Fil. Non sò, che rispondere, voi spiegate ingegnosamente le vostre proposizioni.

Dor. Vi veggo ancora adombrato di mente! Pensateci con lo spirito più riposato; e in tanto proseguite la narrazione delle altre mie dimostrazioni contenute nella Raccolta.

Fil. Alla vostra proposizione pag. 34. ingegnosamente vi affa-

Fig. II. Tav. VII.

affaticate di dimoſtrare, che'l perimetro della parabola Apolloniana deve neceſſariamente far angolo curvilineo nel punto C; e la voſtra dimoſtrazione ſtà appoggiata a quello, che vi ſiete ingegnato provare nelle voſtre antecedenti propoſizioni cioe, che nel punto C, terminando tutte le differenze frà le applicate FG, HI &c. minori dell'unità, il perimetro della parabola non può paſſare ne per il punto P, ne per il punto ſegnato col numero 3, ne per veruno punto intercetto frà X, e P, ſe non fa angolo curvilineo nel punto C: E in vero la dimoſtrazione mi ſembra belliſſima; perchè ſe la linea retta CE fà colla retta AC angolo rettilineo nel punto C; la parabola, che ſi deſcrive, eſſendo, come voi dite, ſotteſa dalle due rette AC, e CE, ſembra, che non ſi poſſa in altro modo deſcrivere, che per due diverſi pezzi di curve, le quali ſono a guiſa di due lunule. Ma quì mi ſovviene una picciola difficultà, che incontrai quando la leſſi.

Dor. Ditela di grazia.

Fil. Diceva frà me: ſe dentro una parabola, che ſi ſuppone deſcritta, ſi poſſono tirare due linee rette, le quali s' incontrino in un punto del perimetro; e pure il perimetro della parabola è una curva continuata: perchè per l'oppoſto non ſi può intender deſcritta una curva continuata intorno alle due linee rette AC, e CE?

Dor. La coſa è diverſiſſima Filotimo; perchè le due mie linee rette AC, e CE, le quali da me ſi ſuppongono deſcritte prima della parabola, fanno giuſtamente conoſcere, che la parabola, ch' eſſi ſuppongono deſcritta, ſia una parabola tirata a caſo a cagione, che non ſi può deſcrivere: e che ſia così; le mie due linee rette AC, e CE ſono determinate da punti determinati, perche ſi tirano per i punti eſtremi del vertice A, e dell' unità BC; e per i punti eſtremi di BC1, e DE2. Oltre a ciò le mie due linee rette AC, e CE ſono linee, intorno alle quali ſi deve neceſſariamente deſcri-

ver

ver la curva, perche la curva hà necessariamente da passare per i punti A, C, ed E. Or questa ipotesi è quella, che fà giustamente conoscere, che la curva deve far angolo nel punto C, e nel punto E; perche, terminando nel punto C tutte le differenze delle applicate minori dell' unità, dal punto C comincia, siccome io hò dimostrato, un'altra serie di differenze frà le applicate maggiori dell' unità. E quindi è, che la porzione di curva sottesa dalla AC non può essere un' istessa curva con quella, ch' è sottesa dalla retta CE. Or questo è in tutto diverso dal supponere la parabola descritta, e poi tirare due linee rette, le quali s' incontrino in qualunque punto del suo perimetro. Ma per darvi di ciò uno esempio sensibile; considerate Filotimo, che se voi nella fig. XXXXV. della Tav. VII. immaginate descritta, come vogliono i moderni, la parabola ADFH, vi sembrerà di poter tirare due linee rette, le quali s' incontrino in qualunque punto F, e terminino a i punti A, ed H: ma se poi voi descrivete le mie due linee rette determinate, prima di descriver la parabola; ed ordinate, che la parabola si descriva per modo, che passi per il punto del contatto, e per i punti estremi di dette linee, in quella guisa, che ordino io nella mia costruzione; voi ritrovate, che 'l perimetro della parabola non si può più descrivere, ne intender descritto. Ma che la parabola non si possa descrivere, l'hò io dimostrato chiaramente dalla pag. 49. fino a 57. delle mie risposte fatte alli Signori Autori degl' atti di Lipsia; e se volete vi farò di nuovo sensibilmente vedere, che non si può descrivere?

Fil. Di grazia?

Dor. Voi sapete, che i signori moderni geometri seguaci della geometria di Renato pretendono, che la parabola cubica abbia le proprietà, ch' essi le assegnano.

Fil. Sì certamente; perche se la parabola Apolloniana le hà; tutto ciò, ch' è vero, si ritrova vero all' infini-

to,

te, e perciò anco la parabola cubica deve aver le proprietà.

Dor. Or vedete se è possibile, che la curva ACHG non faccia nel punto C angolo curvilineo con la porzione della parabola piana sottesa dalla retta AC?

Tav. III. Fig. XVI.

Fil. Non può certamente, perche se l' angolo ACE è angolo ottuso, il quale è dentro la linea retta AF, e la retta CG è fuori della retta AF; l' angolo, che fanno le due rette AC, CG, sarà un angolo entrante, e perciò non si può tirare per i punti estremi A, e G, e per il punto C, punto del contatto, una curva continuata.

Dor. E ben, che dite: Vi pare, che la parabola cubica possa essere una linea curva, la quale facci angolo curvilineo con un pezzo del perimetro della parabola piana?

Fil. Se mi concedete, ch' io vi dica il mio sentimento, vi dirò, che ritrovandosi nella parabola cubica, i cubi delle applicate minori delle unità, i quali non si trovano ne i vostri Rettilinei, si potrebbe per lo mezzo di quelli descriver la parabola cubica, la quale passasse per i punti C, e G, e con tutto ciò fosse una curva continuata.

Dor. Fate di grazia questa descrizione, perche io poi vi farò conoscer gl' assurdi, che ne nascono.

Fil. Poiche mi concedete tanta licenza, eccola. Supponete descritta la parabola Apolloniana AOCQE, come la suppongono i seguaci di Renato, il di cui parametro, o sia unità, sia AB, ed AD sia 4. Supponete poi descritto il vostro Rettilineo parabolico cubico, nel quale DG sia 8, e supponete le vostre linee rette AC, CG: Alla perfine supponete fatta la figura in tutto simile al vostro Rettilineo parabolico cubico della Fig. XVI. Tav. III.: dipoi supponete che LO sia un applicata minore dell'unità presa per costruzione: sarà come AB ad LO radice, così LO radice ad AL quadrato. Indi fate, come LO ad AL, così AL ad un altra, che sia per esempio LN; la LN sarà cubo della radice LO; e perciò

Tav. VII. Figura XXXXVI.

il

il punto N farà punto di parabola cubica. Dell' istesso modo troverete il punto I, punto di parabola cubica: oltre a ciò avete il punto C, punto estremo dell'unità. Così poi troverete per costruzione i cubi PS; ed avete DG, che ancora è cubo per costruzione; ed ecco, che avete descritta per li punti A,N, I, C, S, G la parabola cubica, la quale non fà angolo curvilineo nel punto C. Se poi vorrete continuare la parabola fino all'infinito, prolungarete l' asse AD fin che venga uguale a 9. unità; farete per costruzione il vostro cubo uguale a 27. unità, al punto estremo del quale drizzarete la retta GH; indi prenderete per costruzione il cubo PM per esempio, e continuando la parabola per i punti G, e M, questa passerà per il punto estremo del cubo 27, senza far angolo curvilineo nel punto G; ed ecco descritta la parabola cubica fino all' infinito.

Dor. Bellissima è la descrizzione; ma in questo caso la parabola cubica farà una linea serpeggiante, la quale mi sembra, che non ci dia l'idea, che i signori moderni ci danno della parabola cubica: Ma che questa sia una linea serpeggiante è certissimo; perche per la vostra ipotesi questa deve passare dentro della mia linea retta AC, poi fuori della mia linea retta CG; perchè se volete, che passi dentro della retta CG, la curva sottesa dalla retta CG farebbe angolo curvilineo con la porzione di curva AXC sottesa dalla retta AC; dunque la curva dee passar fuori della retta CG; poi dentro della mia retta GH, e così sempre alternativamente. Ma se è così, la parabola cubica non è dell' istessa natura della parabola piana; ovvero se volete, che sia dell' istessa natura, la parabola piana dovrà esser ancora una linea serpeggiante; la quale, acciò non faccia angolo curvilineo nel punto C, come io hò dimostrato, che fà, bisognerebbe, che 'l perimetro di essa fusse la curva AOCΓE, e con ciò la curva passasse dentro la mia linea retta CE. Ma di grazia vedete un poco qual fisonomia hanno le parabole piane,

 che

che i signori moderni suppongono descritte? Al certo queste vostre serpeggianti non hanno l'istessa fisonomia, che hanno le parabole de i signori moderni. Vedete di grazia la parabola nella Fig.XXXXV.Tav.VII. la quale certamente non mi sembra una linea serpeggiante.

Fil. Oh di grazia lasciamo i scherzi: Il considerar le fisonomie appartiene a i pittori, non a i geometri. Ma poi puole avvenire, che questa linea serpeggiante, che voi deridete, abbia le proprietà, che i signori moderni geometri assegnano alla parabola cubica, e che con ciò sia linea geometrica, com' essi dicono; e per ciò se voi non dimostrate il contrario, i scherzi non distruggeranno la loro invenzione.

Dor. Mi rallegro. Voi state su'l serio, e fate bene; perchè così si deve fare in Geometria: ma con tutto ciò posso dirvi, che a me lice scherzare intorno a queste parabole cubiche; perche dopo che hò dimostrato, che la parabola piana non hà le proprietà, che se le assegnano, sarebbe sciocchezza il dire, che l'abbia la parabola cubica. Ma già che volete di nuovo la dimostrazione, rispondo alla vostra richiesta, e dico, aver io dimostrato nella mia Duplicazione del cubo, che nelle infinite intercette frà BC1, e DG8, le quali terminano alla retta CG, vi si contiene la somma delle differenze, che posson essere frà gl'infiniti cubi delle applicate intercette frà BC1, e DE2; ond'è, che in virtù della mia dimostrazione il luogo de i cubi non può essere ne alla vostra linea serpeggiante, ne ad altro luogo, che si possa immaginare dentro, o fuori della mia retta CG. Proseguite in tanto a narrare il giudicio, che avete fatto delle altre mie dimostrazioni contenute nella Raccolta.

Fil. Se volete, ch'io vi dica con sincerità il vero; l'aver' io veduto, che la parabola Apolloniana, e le parabole cubiche hanno sopra i vostri Rettilinei il vantaggio di dar le radici, e i cubi minori dell'

uni-

unità, è stata la cagione, per la quale sono stato sempre al quanto dubbioso, nell' affermar come vere, o come false le vostre proposizioni; perchè diceva frà me medesimo: se nelle curve si ritrovano le radici, i quadrati, e i cubi minori dell' unità; e ne i Rettilinei del Signor Doria non vi si trovano, sembra, che nelle curve si debba ritrovare il luogo generale delle radici, de i quadrati, e de i cubi, e non ne i Rettilinei del Signor Doria; perchè alla perfine il luogo delle radici delle ascisse dell' asse dee essere un solo. Questa considerazione mi hà fatto sempre dubbitare, che nelle vostre dimostrazioni non vi si nascondesse qualche paralogismo a me ignoto.

Dor. Io di nuovo vi dirò Filotimo, che se aveste ben lette, e considerate le mie risposte fatte alli Signori Autori degl' atti di Lipsia, aureste veduto, che alla pag. 63. nel paragrafo, che comincia, *E quì è degno di considerarsi &c.* aureste veduto dico, aver io provato, che lo ritrovarsi nella parabola Apolloniana le radici minori dell' unità, è giustamente quello, che fà si, che non vi si ritrovino le radici maggiori dell' unità: Ma perche veggo, che voi non avete ben inteso quello, che colà hò detto; voglio più ampiamente spiegarvi questa verità. Dovete sapere, che le radici de i quadrati, e de i cubi minori dell' unità, che vale a dire le radici minori dell' unità, sono di diversa natura delle radici, de i quadrati, e de i cubi maggiori dell'unità, intercetti frà le radici di numero intero; e ciò perchè molte radici de i quadrati, e de i cubi minori dell' unità si possono costruire, ed esprimere in linea, e in numero; e le radici maggiori dell'unità intercette, frà 1, e 2, frà 2, e 3 &c. non si possono esprimere altro, che in linea: donde ne avviene, che le radici, i quadrati, e i cubi minori dell'unità abbiano frà essi la proporzione di linea a linea, e quella di numero a numero in duplicata, subduplicata, e triplicata ragione, secondo la lor potenza: e

ch'all'incontro le radici, i quadrati, e i cubi maggiori dell'unità abbiano solamente frà essi proporzione di linea a linea secondo la lor potenza, cioè radice a radice, quadrato a quadrato, cubo a cubo &c. ma non quella di numero a numero. E questa appunto è la cagione, per la quale, siccome io hò dimostrato, il perimetro della parabola fà necessariamente angolo curvilineo nel punto estremo dell'unità, quando si voglia continuare a descriverlo come una curva continuata; e ciò perchè, terminate che sono nelle unità le radici minori dell'unità, quelle, che sieguono, mutando natura, mutano ancora di luogo: E quindi è dunque, che le radici maggiori dell'unità vanno a terminare nelle mie linee rette, che sono pezzi d'ipotenuse. Questo, ch'io hò detto, è in breve l'intima cagione di tutto quello, ch'hò dimostrato.

Fil. Favoritemi di spiegar questo più in particolare.

Tav. II. Fig. VII.

Dor. E' chiarissimo per prima, che le radici minori dell'unità, si possono costruire in una ragione subduplicata de i loro quadrati, la quale si esprime in linea, e in numero; e che similmente i quadrati, e i cubi minori dell'unità si possono costruire in una duplicata, e triplicata proporzione, la quale si esprime in linea, e in numero, e per esempio: se voi prendete AH uguale ad $\frac{1}{4}$ dell'unità AB, sapete, che la sua radice è uguale alla $\frac{1}{2}$, e per ciò, facendo HI uguale alla $\frac{1}{2}$ di AB, avete espressa in linea, e in numero la radice del quadrato AG: Dell'istesso modo se prendete la AF uguale ad $\frac{1}{16}$ dell'unità AB, sapete, ch'il suo quadrato è $\frac{1}{4}$; e per ciò prendendo FG uguale ad $\frac{1}{4}$ dell'unità AB, avete espressa in linea, e in numero la radice del quadrato AF, e così sempre moltiplicando i numeri rotti in se medesimi, trovate i suoi quadrati, che corrispondono in numero, e in linea alle loro radici: E la cagione, per la quale nelle radici, e nelli quadrati minori dell'unità i numeri corrispon-

dono

dono alle linee, è solamente, perche nell' unità AB non si suppone, che il grave dal vertice A s' acceleri in ogn' uno de i punti F, H, L, &c. e ciò perche l' unità AB, la quale và unita con la linea, che percorre il mobile, che và di moto equabile, si considera per uguale all' unità BC; dalla qual cosa nè avviene, che le radici espresse in numero possono giustamente corrispondere a i punti estremi de i loro quadrati, ciò che non avviene ne i quadrati maggiori dell' unità, ne i quali si suppone, che il grave s' acceleri uniformemente in ogni punto dell' asse, e descriva in ogni istante di tempo spazii disuguali. Così dunque i quadrati, e le radici minori dell' unità si possono costruire in modo, che s' esprimano in linea, e in numero; o che le radici corrispondano a i punti estremi de i loro quadrati. Vero è bensì, che la costruzione della curva AGIMC, in questo modo fatta, ne men è legitima, perchè bisognerebbe, che prendeste per costruzione tutte le infinite radici minori dell' unità per poter dire, che la curva AGIMC è il luogo generale delle radici minori dell' unità, la qual condizione è impossibile, e non si può ordinare; ed alla per fine le radici, che prendete per costruzione, le potete esprimere in linea, e in numero, ma non potete trovare il luogo generale di esse. Vi mostrerò ora, come le radici maggiori dell' unità, intercette frà 1 e 2, fra 2 e 3 &c. non si possono mai esprimere in numero. Tutte le radici de i quadrati intercetti frà BC1, e DE2, quando si vogliano spiegare in numero, si trova, che sono unità coll' aggiunta di frazzione; perche sendo tutte maggiori di BC1, e minori di DE2, che sono numeri interi, e successivi, le intercette frà 1, e 2 non posson essere altro, che unità coll' aggiunta di frazzione: ma voi sapete, siccome vi hò detto poc' anzi, che il prodotto di qualsivoglia numero mischiato di frazioni non può mai produrre un numero intero: Dunque il prodotto di una radice in-

intercetta frà BC1, e DE2, la quale o si voglia, che termini alla curva, o alla retta, non può esser altro, che una unità mischiata di frazione; e per ciò non può esprimere il valore del quadrato 2, ne il valore del quadrato 3, i quali sono intercetti frà 1, e 4. All'incontro se voi prendete per la XIII. del VI una mezza proporzionale frà AB1, ed AD4, ed un'altra mezza proporzionale frà BC1, e DE2; aurete in linea le analogie; che sono frà i quadrati, e i quadrati; frà le radici e le radici. Adunque le radici maggiori dell'unità hanno frà esse una ragione, che si spiega in linea, ma che non si può spiegare in numeri; e perciò le radici maggiori dell'unità sono di diversa natura delle radici minori dell'unità: e se sono di diversa natura, devon essere in diversa sede, e in diverso luogo; ch'è quello, che mi sono proposto di dimostrare. E se diceste, che frà i quadrati intercetti frà AB1, ed AD4 ve ne sono di quelli, che sono unità coll'aggiunta di frazzioni, e che perciò in quelle il numero può esprimere il valore de i quadrati, e delle radici. Di nuovo vi rispondo quello, che vi ho risposto, quando avete supposto di trovare, per lo mezo de i triangoli simili KBC, KDE, la radice $1\frac{1}{7}$, cioè dico, che supponendosi i quadrati generati da un mobile, che s'accelera in ogni punto della BD, i numeri non corrispondono alle linee, e che per ciò quello, che si trova nel lato KD, non si trova nell'asse AD: onde ne viene, che nell'asse AD il numero 2 non si ritrovi nel punto estremo della linea doppia dell'unità AB, e la sua radice non si ritrova in alcun numero, la qual cosa non avviene nelle radici de i quadrati minori dell'unità, ne' quali non si suppone accelerazione nel mobile, siccome hovvi detto poc'anzi. E se per avventura generasse ancora nella vostra mente difficoltà il sembrarvi, che qualche radice intercetta frà 1 e 2 terminasse fuori della retta CE. Leggete bene la mia proposizione a carte 43 della Risposta da me ultimamente fatta alli

Tav. II. Fig. VII.

Signori

Signori Autori degl' atti di Lipsia, e vedrete, che nell' infinito le differenze frà le mie parallele, e le applicate d'Apollonio suaniscono, e le radici infinite vanno a terminare alle mie linee rette: dalla qual cosa ne avviene, che il luogo generale delle radici siano le mie linee rette, a cagione, che gl' accidenti particolari non possono distrugger quello, ch' è vero nell' infinito, e in generale, siccome è sentimento di tutti i matematici. Così dunque le radici, e i quadrati maggiori dell' unità, non si possono costruire, ne esprimere in numeri; perche in quelle i numeri non corrispondono alle linee. Ora voi potete Filotimo dopo quello, che vi hò dimostrato, vedere ancor la cagione, per la quale la parabola Apolloniana non si può costruire; perchè quando le radici, e i quadrati mutano di natura, ciò che avviene, quando cominciano le radici maggiori dell' unità; allora il loro strumento meccanico non addita più il luogo delle radici: e che ciò sia vero, osservate quello, che hò detto dalla pag.43. fino 48. della mia Raccolta Fig. X., e XI. della Tav.II. e subito vedrete, che le radici minori dell' unità, com' è NM nella Fig. X, si ritrovano agevolmente collo strumento meccanico. Ma quando poi nella Fig. XI. si suppone divisa la retta BT in parti infinite, e tutte uguali frà loro, nella retta ES, che si suppone esser immediata sotto l'unità BC, ovvero AB, non vi si ritrova più collo strumento meccanico la radice del quadrato AE maggiore dell' unità AB: e questo per qual cagione Filotimo? certamente non per altra, se non perchè sotto il punto C le radici mutano di natura. Ma giache siamo nel svelar misterj di Geometria, vò spiegarvi ancora brevemente la cagione, per la quale i miei Rettilinei parabolici sono di lor natura curve, che si compongono di linee rette determinate da punti determinati.

Fil. Dite di grazia Sign. Doria, perchè mi avete ripieno l'animo di maraviglia.

Dor.

Dor. Voi vedete, che le radici infinite delle ascisse infinite, le quali compongono la parabola; il perimetro della quale i sign. moderni geometri vogliono, che sia una curva continuata, sono di trè diverse nature, cioè le radici minori dell' unità, le quali sono frazzioni, e producono frazzioni; le radici di numero intero, i quali numeri sono l'uno all' altro successivi, come 1,2,e 3 &c.,e questi s'esprimono in linea, e in numero, e producono i quadrati di numero intero, come 1, 4, 9, 16 &c. e per ultimo le radice intercette frà 1, e 2, frà 2, e 3 &c. le quali hanno frà esse proporzione di linea a linea, ma non quella di numero a numero. Oltre a ciò le radici minori dell' unità, le quali si fan terminare alla curva, non sono in proporzione aritmetica frà esse, perche non terminano alla linea retta. All' incontro le intercette frà 1, e 2, considerate come infinite, sono in proporzione aritmetica, e dell' istesso modo le infinite intercette frà 2, e 3 sono in proporzione aritmetica, e così sempre fino all' infinito; ond' è, che le radici delle ascisse dell' asse sono di trè diverse nature. Or queste trè diverse nature, che hanno frà loro le radici, e i quadrati, sono l' intima cagione, per la quale il luogo generale delle radici dee essere necessariamente una curva; ed ecco come. Le radici intercette frà BC1, ed ED2 sono nel triangolo SDE, le radici intercette frà ED2, ed FG3 sono nel triangolo MFG, e perciò le radici intercette frà BC1, ed ED2, e le radici intercette frà ED2, e FG3 sono in proporzione aritmetica, ma sono in diverse serie di proporzione aritmetica, e per ciò la retta CE, fà angolo nel punto E con la retta EG; e per l' istessa cagione la retta EG con la retta GL, e con ciò formano una curva composta di linee rette determinate da punti determinati. Ed eccovi spiegata l'origine di questa curva, ch' è la stessa, che han desiderato sempre di conoscere gl' antichi geometri,

Tav. I. Fig. VI.

per-

perchè, ficcome hò detto rifpondendo alli Signori Autori degl' atti di Lipfia, Apollonio conobbe folamente in generale, che 'l luogo delle radici deve effere una curva; ma perchè la fua coftruzione era mancante, non potè conofcer le linee rette, delle quali la fua curva fi componeva. Or quì dovete confiderare, che la cagione, per la quale i Signori geometri han creduto, che 'l perimetro della parabola fuffe una curva continuata, è ftata folamente, perchè han confiderate tutte le radici come d' un' iftefsa natura: In vece che, quando per la mia efatta coftruzione fi divide l' affe nelle parti da me ordinate, e fi coftruifcono le radici di numero intero, fi ritrova effer le radici di diverfa natura, e che per ciò la curva medefima non puol mai effere una curva continuata. E fe per avventura diceste di nuovo, che la mia curva è mancante, perchè in quella non fi ritrovano le radici minori dell'unità, le quali fon neceffarie. Vi rifponderei, che quefte radici minori dell'unità non folo fono inutili a me, perchè non mi bifognano, ficcome potete vedere nella propofizione V. problema IV. della mia Duplicazione del cubo; ma fono ancora inutili alla Geometria lineare, perchè le frazzioni folamente hanno ufo nell'Aritmetica. Ora che dite? vi fembra più, che fia un paradoffo la mia propofizione? Vi fembra, che i Signori degl'atti di Lipfia doveffero riferire con difprezzo un metodo di quefta fatta; il qual'è in tutto appoggiato ad una coftruzione fatta per i poftulati d' Euclide; e che doveffero riferirlo con quelle inurbane parole? *Et hic quidem fi quorumdam talis eft novitas, quæ tam parum valeat ad vetera evertenda, ut quis tuto operofo ipforum examine fuperfedere poffit: hoc ex eorum fortaffe numero eft dicendum?* Vi fembra poi, che alcuni fignori moderni matematici doveffero trattare il mio Metodo, come un ftravagante penfiero degno di effer paragonato a quello di Tomafo Obes, allora quando imprefe egli di dimoftrare, che la XXXII. del

primo d' Euclide era falsa? e che tal'uno mi dovesse dipingere a i giovani, ed a i suoi discepoli con idea d' huomo di cervello chimerico, e stravagante?

Fil. Avete ragione; del vostro Metodo si dovea ragionare con stima: ma sono degni di compassione li Sig. Autori degl' atti, e quel tale moderno professore ancora, che voi dite; perche forse non auranno nel principio inteso il preggio, ed il valore delle vostre dimostrazioni, perchè colle nuove cose, che avete prodotte, sempre più vi siete ingegnato di schiarirle.

Dor. No, non sono degni di compassione, perchè altra cosa è il non intendere su'l bel principio una proposizione affatto nuova, altra cosa è il rifiutarla come falza, sol tanto, che si senta asserire. Filotimo le menti accorte, e penetranti veggono, che traluce qualche cosa di buono anco in quelle cose, che non intendono; e in conseguenza di ciò si sveglia in esse una certa curiosità di seriamente esaminarle per ritrovare il vero, o il falso, che si nasconde nel fosco di quelle nuove dimostrazioni.

Fil. Di ciò non potete dolervi d' altri, che de i Signori Autori degl'atti di Lipsia, i quali nel principio la disprezzorno senza studiarla; ma degl' altri professori non potete dolervi, perche questi vi han fatto le lor' opposizioni.

Dor. E' verissimo; ma le opposizioni fatte non han prodotto quel frutto, che devon produrre le dispute, che è lo schiarimento della verità.

Fil. In vero queste dispute senza decisione sono state un poco nocive al decoro della litteraria repubblica; ma che si vuol fare!

Dor. Ma ditemi un poco? Voi, che siete huomo sincero, se aveste avuto l' onore di essere annoverato in quell' antichissimo, e celebre consesso de' letterati di Lipsia, e foste stato ancora seguace dell'Algebra, delle curve, e de i nuovi metodi; aureste dette quelle inurbane parole: *Et hic quidem &c.* Ditemi con sincerità il vostro sentimento? *Fil.* Oh!

Fil. Oh questo certo che nò; aurei prima lodata come ingegnosissima la vostra Invenzione senz' affermare alcuna cosa di positivo; ed aurei persuaso a matematici di studiarla, come cosa, ch' era a nuova, e legitima ipotesi appoggiata, e in questa sì fatta idea mi sarei rimasto: poi dopò averla ben studiata aurei detto...

Dor. Che aureste detto: ditelo da libero, e sincero qual voi siete.

Fil. In vece di dire quelle inurbane parole, ch'essi hanno scritte; aurei detto. *Et hic quidem si quorumdam talis est novitas, quæ tam valeat ad cætera amplianda, & vana, & nova evertenda, ut nemo tuto ab illorum examine supersedere possit: hæc inter illarum numerum est dicenda.*

Dor. Voi avete formata la vera idea della mia novella invenzione. Ma che direte Filotimo, quando saprete, che quel tale professore, che vi hò accennato, non solo non si contenta di usare il silenzio, ma ragionando con suoi discepoli della mia Invenzione, ne parla con disprezzo, e a tutto suo potere s'affatica di dipingerla per chimerica, e stravagante, e con ciò alienargli dal desiderio di studiarla?

Fil. Oh questo sente della calunnia Signor Doria mio; questo tale se pur' vi è, ch' io non lo credo, sveglia in me un desio di andarlo a ritrovare, e d' impegnarlo a rispondere alle vostre dimostrazioni.

Dor. Tolga il Cielo dalla vostra mente un così pericoloso pensiero Filotimo; voi ciò facendo, v' esporrete a sentir per risposta mille magistrali asfertive, e degli vehementi rimproveri, per aver osato di ragionar d' una invenzione, della quale alcuni pochi professori, i quali si fan lecito di regolar la republica de' matematici, han concluso, che in niun modo se ne ragioni; che si tronchi il discorso con chiunque incominciasse ragionamento intorno a sì perniciosa materia; e che co' i giovani studiosi se ne ragioni sempre con termini di disprezzo; continuando più che

mai ad insegnar loro l' Algebra speciosa, e la dottrina delle curve, a fine di darli con ciò a credere, ch'essi come maestri disapprovano la mia invenzione.

Fil. Questo che dite, farebbe troppo gran torto a quella lega de' matematici, se fusse, come voi dite: Ma io penso, che se non confessano ancora la verità delle vostre dimostrazioni, ciò avvenga, perchè non le intendono; ond'è che voglio andar io risolutamente a ragionare con alcuno di essi.

Dor. Filotimo, non vi riuscirà di tirarli al discorso; perchè subito, che scorgeranno, esser voi bene instrutto delle mie dimostrazioni, e persuaso della verità, che in quelle si contiene, troncheranno il discorso con un' assertiva magistrale, avvalorata da un riso sardonico; e poscia vi dipingeranno a i loro discepoli per un' huomo dolce di sale, che si è lasciato ingannare da me: se voi però foste uno di quei, ch' essi sanno, che non è capace di distingere in Geometria un'errore; allora con una apparente opposizione, ma breve, vi mandarebbero a casa.

Fil. Quanto più voi mi dipingete al vivo la malizia di questo senato matematico, tanto più mi s' accende nell' animo il desiderio di ragionar con essi; e voglio in ogni modo andare a ritrovarli.

Dor. Poichè così volete, andate; ma presentatevi avanti a quel tale professore cattedratico di matematica nella figura di suo discepolo; ne v'impegnate di voler esaminare con esso le mie dimostrazioni, perch' egli farà sembianza di sdegnare di ragionar tanto lungamente con voi, quanto è necessario per esaminare una dimostrazione; e per ciò è forza, che voi riduciate la cosa ad una sola dimanda: E se a questo egli farà sembianza di sdegnar di rispondere; voi dite nel seguente modo. Ma Signore, i maestri non possono negare di rispondere alle umili richieste de' loro discepoli.

Fil. Ed a qual richiesta mi devo io ristringere?

Dor. Diteli, che voi dubbitate, se sia vero, che la parabo-

rabola meccanicamente descritta abbia, a similitudine del cerchio, le proprietà, che da Apollonio se le assegnano. A questo egli risponderà, che è una cosa approvata da tutti;e che per ciò sù di tal materia non si dee ragionare. E voi allora rispondete, nò mio Signore; il Metodo del Doria fà vedere il contrario di questa vostra opinione, adunque lasciate almeno, che vi facci un qualche motivo,e con ciò datemi campo di liberarmi dal mio errore. A questo il professore continuerà a rispondervi colle sue assertive magistrali; e voi allora direte: ma voi Signore siete troppo poco caritatevole; a me sembra, che la costruzione del Doria faccia palese gl'errori de i moderni; e voi come maestro siete obbligato a dissingannarmi.

Fil. E se mi ascolta, qual dubbio devo proponergli?

Dor. Fateli quell' istesso motivo, ch' io hò proposto alli Signori Autori degl' atti di Lipsia intorno alla descrizione della parabola; leggetelo nelle mie risposte, che hò fatte alle loro obbiezioni, e per prenderlo ancor più da i suoi principj, fatelo nel seguente modo.

Fil. Dite di grazia.

Dor. Prima richiedeteli, se è vero, ch' essi pretendono, che la parabola Apolloniana, e tutte le altre curve d' Apollonio, dianoin ogni punto del lor perimetro le proprietà, ch'essi assegnano alle curve in quella guisa, che in ogni punto della periferia del cerchio si ritrova la proprietà del cerchio.A questo egli vi risponderà, questa esser cosa, che da niuno si dubbita, e che i capricci del Signor Doria intorno a questa materia non sono stati ricevuti da veruno. E voi allora rispondete, ma con rispetto però; gli pensieri del Signor Doria, che voi nomate capricci, dopò ch'io li hò letti nella sua dissertazione, mi sono paruti degni di esame; e poi, anco se si vuol riguardare all'ingrosso, il Signor Doria appunto com' egli dice nella sua dissertazione,non impugna altra cosa, che una novità, ch' il Sig.Des-Cartes hà introdotta nella Geometria,

e la

e la quale è in tutt'opposta al sentimento degl'antichi geometri, e frà moderni ancora al sentimento di Vieta: dunque perchè non si hà da esaminare una invenzione, che se è vera, appresta il comodo di far tutto quello, che si desidera intorno a i solidi in Geometria, e perfezziona quella scienza?

Fil. Credo, che a questa richiesta il professore s'appiglierà al partito di ragionar seriamente?

Dor. Oh questo nò Filotimo mio! Egli non scenderà dal suo trono per così poco, anzi di più risponderà con modo autorevole, e con un riso scherzevole.

Fil. E che mai potrà dire?

Dor. Dirà, che la proposizione di Renato intorno alle curve, essendo stata approvata da tutti i moderni, l'approvazione di tanti huomini illustri è una decisiva sentenza valevole a condannare con giustizia il sentimento di Vieta, e quello degli antichi ancora.

Fil. Ed io, che risponderò a questa proposizione?

Dor. Convincetelo con le sue proprie armi, e diteli: Voi altri sig. moderni, i quali avete insegnato, che in filosofia non si deve stare all'autorità; perche ora volete, che noi stiamo all'autorità vostra in materie geometriche? Direte poi, che sarebbe un troppo lungo discorso, se si volessero narrare tutti gl'abagli, che han preso i moderni, quando si son voluti opponere alle sentenze degl'antichi? Rispenderete, che è proprietà innata dell'umana natura, che ritrovino prontamente seguito quegl'inventori, che propongono la licenza; e ciò perche in quella si ritrovano comode tutte quelle menti meschine, che non sono valevoli a produrre alcuna cosa, quando sono costrette a camminare per lo stretto, ma dritto sentiero del vero; e che per ciò una folla de'moderni approvatori non fà nella vostra mente alcuna autorità contro quelle sentenze degl'antichi, che han vissuto più di duemila anni.

Fil. Ma se io ragiono in questa guisa, noi usciamo dal veri-

verisimile Signor Doria, perchè questo non è ragionar da discepolo?

Dor. Avete ragione; diteli dunque così: Io venero l' autorità de i moderni, ma vi priego d' insegnarmi a conoscer questo errore del Doria; e di ascoltar questo mio brevissimo motivo; siete tenuto a farmi questa grazia come maestro.

Fil. Ed allora, che pensate voi, ch' egli risponderà?

Dor. Si porrà come vinto dalla vostra importunità ad ascoltarvi ridendo; e voi allora cominciate il vostro ragionamento, e dite. Quando io mi pongo a considerar la proprietà del cerchio, a fine di confrontarla con quella della parabola, mi pongo prima ad esaminar la natura de' postulati, poi quella delle difinizioni, e per ultimo quella delle proposizioni, per vedere, se nelle pretese dimostrazioni delle proprietà d' Apollonio vi si trovi l' istessa certezza, che si trova nelle dimostrazioni d' Euclide. Faccio dunque il paragone frà Euclide, ed Apollonio, e veggo, che Euclide prima mi definisce la natura del cerchio, perche dice, che nel cerchio ogni punto della periferia deve esser ugualmente distante dal centro; poscia Euclide con un postulato, che deduce dalla definizione, mi concede di descriverlo, e con ciò mi permette la licenza di potere, dopò che col semidiametro BA hò descritto il cerchio ACD, prendere qualunque punto della periferia AXG per punto di periferia; e se alcun huomo stravagante richiedesse, che si pruovi come E, e G sono punti di periferia di cerchio; se li risponderebbe con ragione, ch' è matto, perche impugna un postulato, senza il quale non può sussistere la Geometria: E in vero quanto sia semplice, e sicura la costruzione, ch' Euclide ordina ne suoi postulati, lo ha dimostrato a bastanza il Sig. Doria nella sua Dissertazione. Continua poi Euclide, e nella XIII. del VI. libro insegna a prendere la mezza proporzionale frà AV. per esempio, ed AD, la quale è VX, e conclu-

Tav. VI. Figura XXXVIII.

clude, che tutte le altre applicate sono generalmente mezze proporzionali frà la porzione del diametro, nella quale cadono, e il residuo di esso, come per esempio, MG mezza proporzionale frà AM, e MD. Dell' istesso modo dunque se uno richiedesse la dimostrazione, perche MG è mezza proporzionale frà AM, e MD, dopo che già si è dimostrato, che VX è mezza proporzionale frà AV, ed VD, non solo non meritarebbe risposta, ma meritarebbe esser trattato da pazzo. Veggiamo ora se nella parabola si ritrova l' istessa evidenza, che si ritrova nel cerchio, appunto come dite voi altri signori moderni? La parabola all' incontro è una curva, che nasce dalla sezzione del cono; ma dopò che à cagione della sezzione del cono, voi avete considerata questa curva, non la potete più definire, perchè non avete in quella, come si hà nel cerchio, alcuna proprietà chiara, e nota. Or questa è la cagione, per la quale voi ne meno potete formare un postulato, col quale ci possiate insegnare a descriver la parabola; che sia così. Intanto Euclide dice nel suo postulato *centro, & intervallo circulum describere*, in quanto, che nella definizione ci hà fatto conoscere, che ogni punto della periferia dev' essere ugualmente distante dal centro; donde ne viene, che una linea retta, ch' è il semidiametro, ragirandosi in se medesima sia la più propria per eseguire la proprietà generale contenuta nella definizione; ed ecco, che il postulato si deduce dalla definizione; ed il non potersi formare un postulato dedotto da una definizione della parabola è appunto la cagione, per la quale la parabola non si può descrivere. A questa proposizione vi risponderà certamente il maestro per primo, ch' essi hanno nota la proprietà della parabola, perche hanno noto per dimostrazione, che le applicate all'asse sono mezze proporzionali frà'l parametro, e e ascisse; e per secondo vi risponderà, che niente importa, che la parabola non si possi descri-

vere

vere; perchè, per intenderne le proprietà, basta, che si possa intender descritta, e tutte le altre frivoli, ed apparenti ragioni, che si leggono nel principio del secondo libro della geometria del Des-Cartes, e le quali io hò a bastanza impugnate nella mia Dissertazione.

Fil. A questo io risponderò, che la parabola non hà le proprietà, ch' essi l' assegnano, perche voi lo avete dimostrato?

Dor. In questa guisa rispondereste ottimamente; ma io voglio, che voi le facciate conoscere, che giustamente perche non v' è un postolato da una definizione dedotto, col quale si possa descriver la parabola, non potevano i signori moderni a buona ragione asserire la loro proposizione, cioè, che *la parabola dà, a similitudine del cerchio, in ogni punto del suo perimetro le proprietà*.

Fil. E che dirò io per provar questa proposizione?

Dor. La provarete nel seguente modo, e le farete la seguente petizione: Voi quando descrivete la parabola in piano, prendete con lo strumento meccanico almeno cinque mezze proporzionali fra 'l parametro e le ascisse; non è così? Questo è verissimo, e lo hanno scritto i signori autori degl' atti di Lipsia nelle opposizioni, che han fatte al Sig. Doria. A questo il maestro vi risponderà, che è certissimo; e voi allora ripigliate: ma io vi proverò geometricamente, che questa costruzione non può dar altro, che proprietà particolari ne' punti particolari; e che non mai può dare proprietà generali. A questo vi risponderà egli maravigliato, e ridente, e dirà, e come? E voi allora dimostrate, che non possono avere le proprietà generali, e ditegli. Fingiamo pure, che si volesse concedere la vostra ipotesi, cioè di tirare per i punti estremi delle applicate prese per costruzione il perimetro della parabola ADFH &c. In questo caso voi avete cinque applicate prese per costruzione; ma se io vi niego, che i pun-

Tav. VII. Figura XXXXV.

i punti intercetti frà D, ed F; frà F,ed M; frà M,ed H &c. sono punti,ne i quali terminano le mezze proporzionali fra'l parametro,e le ascisse; che mi rispondere-te? mi potrete forse rispondere,come mi risponderebbe Euclide a riguardo del cerchio, e dire: io per il postolato ti hò descritta la periferia ACD. Tav. VI. Fig. XXXVIII. poi ti hò provato, che nel punto X cade la mezza proporzionale frà AV,ed VD: Dunque se tu farai l'istesta dimostrazione, ritroverai lo stesso in qualunque punto della periferia ; e ciò perche la proprietà nota,che ti ho insegnata nella definizione, sendo generale, è la stessa in ogni punto. Continuarete poi a dire ; certamente che a riguardo della parabola non mi potete in altro modo rispondere, se non dicendo. Prendete quante applicate volete intercette frà CD, ed EF; frà EF, e GH &c. e troverete, che cadono nella curva, che io hò immaginata descritta : e sapete perche non mi potete altro rispondere? perche se sapete i luoghi de i punti D, F, &c. presi per costruzione, non potete sapere i luoghi degli altri punti, a cagione, che nella parabola non conoscete niuna proprietà,che v'insegni quanto ogni punto del perimetro dev'esser distante o dal vertice, o da i punti dell'asse : In vece che tutti i punti della periferia devono essere ugualmente distanti dal centro, perciò lo potete descrivere, e poi dimostrare in ogni punto l'istessa proprietà, ne sete costretto, come nella parabola,a prender tutte le applicate per costruzione. Diteli questo, e poi incalzate proseguendo a dire ; ma questo non è modo di dimostrare,ma è un modo di costruire applicate particolari,intorno alle quali supponete descritta una curva, la quale non solo non si può descrivere, ma non si può ne meno immaginar descritta ; perche per immaginarsi descritta bisognerebbe, siccome voi stesso dite, prendere infinite applicate ; la qual condizione è impossiibile. Passate poi a discorrere delle mie dimo-

Tav.VII. Figura XXXXV.

mostrazioni, e dite. In vero conosco, che 'l Sig. Doria hà ragione, quando nella Fig. XXXXIV. Tav. VII. egli dice, che dopo, che voi avete supposto prese per costruzione cinque applicate, cioè; ML, SL &c. dovere dimostrare in qual punto della QZ cade la radice di AX, e lo stesso di tutti gli altri punti. Dite poi, or questo da che nasce egli? certamente non da altro, se non da che voi non potete considerar le proprietà generali in una curva, che non avete prima supposta descritta; e non potete descrivere una curva, che non avete potuto definire, a cagione, che in essa non conoscete, come si conosce nel cerchio, alcuna proprietà generale: E in vero di questo ne fà anche un sensibile testimonio il vedersi, che voi volete almeno cinque applicate prese per costruzione; e che voi medesimi confessate, che più se ne prendono per costruzione, più la parabola viene esattamente descritta, la qual cosa fa vedere chiaramente il meccanichismo della vostra costruzione, e la debolezza delle vostre dimostrazioni: perche se così non fusse, una sola applicata vi darebbe, come nel cerchio, le medesime proprietà in ogni punto del perimetro della parabola. Questa, che io hò detto, è la dimostrazione, che voi dovete fare all'accennato maestro, e dopo questo dovete francamente dire. Ecco, che Renato Des-Cartes ave errato, quando hà preteso paragonare il suo postolato, cioè *datum conum dato plano secare*, con i postolati d'Euclide; perch'egli prima d'asserir ciò, dovea vedere, quali erano le nozioni chiare, ch'egli aveva delle proprietà di quelle curve, che nascono dalle sezzioni del cono; perche certamente, quando egli non aveva alcuna nozione, in virtù della quale avesse potuto definir la parabola, e da quella definizione dedurne postolato, come hà fatto Euclide, non potea poi dire, che s'intenda descritta. Questo, che hò detto, dite voi concludendo, vale a mio credere per distruggere la vostra ipotesi, e far cono-

ſcere, che ſiete corſi alla cieca, quando avete ricevute per linee geometriche, cioe per linee, che abbino proprietà vere, e coſtanti, le curve d'Apollonio. Ma oltre a ciò di nuovo direte, che il Sig. Doria trova egli il vero luogo delle radici, e prova, che le radici infinite de' quadrati intercetti frà AB1, ed AD4, terminano alla ſua linea retta CE; e lo dimoſtra in più modi nella ſua Raccolta; e poi viene di bel nuovo alla conſiderazione del voſtro errore, e dice, che la ſua legitima ipoteſi, o ſia coſtruzione è quella, che lo fà conoſcere; perche ſe voi ſupponete tirata la linea retta CE, vi ſembrerà, che per i punti A, L, L, C, T, T, Q, E, ci poſſa paſſare una curva; ma che ſe poi voi tirate la retta CE, vedete, che gli punti T, Q, E, ſono punti di linea retta; e che perciò le infinite radici intercette frà BC, e DE terminano in quella: poi diteli concludendo; a me dunque ſembra, eſſer neceſſario, che voi, il quale nelle voſtre opere avete più, che qualunque altro, portato all' eccеſſo la licenza da i moderni introdotta nello ſtudio della Geometria, non ve la paſſiate con aſſertive magiſtrali a' voſtri diſcepoli, e ad altri ſemplici fatte, ma che ſeriamente riſpondiate a i fortiſſimi motivi del Sig. Doria.

Tav. VII. Figura XXXXIV.

Fil. In vero io non sò penzare, che coſa egli poſſa riſpondere à sì forti ragioni, come ſon quelle, che voi mi avete ſuggerite.

Dor. Vi riſponderà in colera; s'appiglierà al partito del magiſtrale; confonderà il diſcorſo; vi deriderà co i ſuoi diſcepoli; vi dara a divedere per un huomo, che hà dato nella ragna; per un huomo, che ſi è laſciato abbagliare da me; e voi Filotimo atterrito da tante arti, negarete quelle medeſime verità, che ora conoſcete, e confeſſate.

Fil. Ah! voi m' offendete Sig. Doria, io non ſon huomo di tal fatta, come voi mi dipingete.

Dor. Compatitemi di grazia Filotimo mio; l' amor della verità, e della giuſtizia non può tanto a' noſtri

ſtri giorni ne' cuori umani, che per ſoſtener la verità, l' huomo voglia eſporſi al biaſimo, ed alla perſecuzione d'huomini già accreditati. Amarete voi, come gl'altri, più di eſſere applaudito da i profeſſori, e divulgato per huomo di lettere, che di eſſer biaſimato come ſtravagante, e come ignorante. Filotimo, la moltitudine atterriſce, e non v'è chi la voglia nemica.

Fil. Ceſſate di grazia di accuſarmi del delitto di viltà, e penſiamo più toſto a quello, che può avvenire. Io hò conſiderato, che forſe forſe la cagione, per la quale il voſtro metodo non è univerſalmente ſeguito, ſia, perchè voi lo avete tutto eſpoſto in modo, che niuno hà luogo di ſupplirlo, nè di dedurne alcuna coſa; e quindi è, che l' amor proprio non intereſſando i matematici nello ſtudio delle voſtre coſe, alcuno non ſi dia briga di dichiararlo per vero.

Dor. Nò, dell' utile, che arreca, non ſi può dubbitare, perchè oltre il trovarſi la proporzione frà tutti i corpi, ciò che ſi deſiderava in Euclide, giova egli infinitamente alle arti, eſſendo applicabile alla meccanica, ed alle coſe tutte: oltre a ciò ſi potrebbero trovare le linee rette, delle quali ſi compone il perimetro dell' Iperbole, e delle Eliſſe; ed ancora una infinità di rettilinei, i quali abbino quelle proprietà, che i moderni malamente aſſegnano ad altre curve; e ſi potrebbero ritrovare, o avvalendoſi de i moti di due mobili, come hà fatto Galileo della parabola, o eſprimendo alcune radici, alcuni quadrati, alcuni cubi &c., con le linee, e con i numeri, come hò fatto io. Alla per fine per lo mezzo dell' unione della quantità continua, e della diſcreta, ſi troverebbero con verità quelle proprietà, che malamente li ſignognori moderni geometri han creduto ritrovare coll' uſo dell' Algebra ſpecioſa, e con quello delle curve. Oltre a ciò queſti rettilinei nati dall' unione della quantità diſcreta, e della continua ſarebbeno utiliſſimi

mi alle arti, ed alla geometria, siccome vi hò fatto vedere nel problema, che vi proposi l'anno 1718., e che poi hò risoluto io medesimo; perchè in quello s' impara a costruir corpi solidi in ogni proporzione. Ecco dunque, che chi vorrà seguire il mio Metodo, ritroverà dove pascere il genio dell' invenzione, e contentar l'amore della propria gloria senza offender la verità.

Fil. In vero io non sò, che cosa possino rispondere i signori moderni geometri. Voi avete fatta conoscere la vostra Invenzione vera, utilissima, e ferace di nuove produzioni: come mai si possono scusare co' i dotti viventi, e trovar fama appò i posteri, se non la ricevono.

Dor. Quelli, che son caduti in errore, e si son fortemente impegnati con i lor discepoli, o con altri semplici à negar la mia Opera con disprezzanti, e veementi asserrtive, temono più la vergogna, che arreca il ritrattarsi, che il biasimo de i posteri, lo quale non è sensibile, ma tutto nell' immaginazione consiste: questi sì fatti huomini poi non solo distornano i viventi dal studiar la mia Invenzione, ma si affaticano di renderli inabili ad intenderla; perchè non sì tosto l' hanno insegnati gl' elementi di Euclide, più per istoria, e per relazione, che per amore d' insegnarli a distinguere il vero dal falso, che subbito gl' introducono nell'esercizio de i calculi pratici, e con ciò fan sì, che prendono amore a quell' abbito pratico, che si può fare anco pensando ad altra cosa: E quindi è poi, che quando veggono una dimostrazione sintetica, fugon da quella come il can dalle mazze. Non mancheranno però nell' onorato ceto de' matematici huomini ugualmente capaci d'intender la verità, che di confessarla costantemente.

Fil. Non più di grazia Signor Doria, io sono stanco di più udire la descrizzione di tante malizie, quante son quelle, che voi avete narrate; e mi giova credere, che tut-

tutto quello, che voi attribuite a malizia d'alcuni, non sia in tutto da malizia prodotto; ma in qualunque modo la cosa sia; e che! vogliam noi darci briga di ciò? Di grazia mirate voi queste sì fatte cose con quell'altezza d'animo, ch'e di voi propria, ne vi date a divider soggetto all'ira.

Dor. Oh Filotimo mio! appunto appunto di questo gran difetto di huomo soggetto alla bile, mi hà accusato quel buon relatore, che fece in Lipsia quella inurbana relazione del mio Metodo, che voi sapete.

Fil. E' vero, ora mi sovviene; ma voi le avete risposto per le consonanze; attendiam'ora a quel, che importa. Voi ne' varij ragionamenti, che insieme tenuti abbiamo, mi avete fatto conoscere, che i modi, ch' oggidì da molti si praticano per insegnar la Geometria, son tutti torti, e difettosi: mi avete fatto conoscere chiaramente, che i moderni algebristi han tolto alla Geometria il preggio di disciplinar la mente nel raziocinio. Ora vorrei, che vi degnaste di darmi qualche particolar precetto intorno al modo di studiar la geometria, in modo tale, che la mente si rendesse così ben disciplinata nel raziocinio, che poi potesse fare utili progressi nell'importantissimo studio della Filosofia, e delle altre scienze: perchè alla perfine io conosco, che quanto più si sà di Geometria, più si può saper di Filosofia; e che assai difficilmente può divenir filosofo colui, che non hà ben formata nel discorso astratto la sua mente, coll'ajuto di un profondo studio di Geometria.

Dor. Ottimamente avvisate, e sappiate, che l'inganno delle moderne lettere consiste in questo solo, ch' ora vi dirò.

Fil. Ditelo di grazia.

Dor. I seguaci di Renato, in ciò che s'attiene alle massime generali, propongono la verità, ma nelle particolari poi distruggono quelle medesime massime generali, ch' essi stessi han proposte; a cagion d'esem-

esempio. Dicono ancor essi, come avete detto voi, che senza lo studio della Geometria non si può divenir filosofo; ma insegnati, che vi hanno gl' elementi per istoria, e per relazione, come vi ho detto; proponendovi l'Algebra speciosa, v' insegnano a calculare, non a meditare; donde ne avviene poi, che nello studio della Filosofia, nel quale non si procede per la via de' calculi, le menti de i calculatori, perche mal disciplinate nel raziocinio, si ritrovano disposte a ricever le ragioni apparenti per vere; le sofistiche, per certe; ed in quella guisa, che in geometria non son valevoli a distinguere il vero dal falzo, non lo sono in filosofia, non lo sono in morale, e non lo sono in politica. E quindi è, che si forma una folla de' dotti superficiali, ed apparenti, che guastono, e corrompono la civile società.

Fil. E da ciò avviene, che veggiamo sorgere tante diversità di opinioni in tutte le scienze?

Dor. E dite pure, tutte inventate più per amor d' alimentar la propria ambizione, che per amore d' insegnar la verità, e di giovare al pubblico. E questo è verissimo Filotimo mio; perche alla perfine voi vedete tutti quelli, che nelle loro nuove opinioni si vantano di esser zelanti del vero; quando poi se gli para avanti gl' occhi qualche verità, che offende la lor ambizione, si scatenano contro quel tale, che l' hà proposta.

Fil. Voi volete dire, che, perche alcuni matematici si sono dimostrati men che sinceri nella vostra Duplicazione del cubo, tutti gl' altri lo sono nell' altre scienze ancora, non è così? ma questo non è argomento.

Dor. E vi par picciolo argomento questo Filotimo? Quell' huomo, che non è sincero in Geometria, dove a lungo andare almeno non può sperare di occultar la malizia, si dee credere, che nelle altre scienze, nelle quali l' huomo si può con sofistiche ragioni

ni difendere; ovvero con apparenti argomenti lusingare la propria passione, si dilungherà in tutto dal vero, e dalla giustizia in tutte le sue operazioni. Filotimo, chi si accostuma a non confessar la verità nelle cose geometriche, le quali non lascian luogo alle dispute, che farà nella Teologia, nella Filosofia, nella Legge, e nelle altre scienze tutte?

Fil. Ora intendo la cagione di tante diverse opinioni, che regnano a nostri dì nella critica istorica, nella morale, nella filosofia, e nelle altre scienze tutte. Questa cagione altro non è, se non perche essendosi ridotta la Geometria al scetticismo, la mente umana non si accostuma più a distinguère il vero dal falso; e quel, ch'è peggio, non si accostuma più ad amare il vero, che conosce. Oh quanto potrebbero dire i scolastici per difendersi dalle tante accuse, che ad essi danno alcuni Sig. moderni huomini di lettere correttori dell'antichità!

Dor. Io non voglio entrare in queste sì fatte materie: quel ch'è accaduto in questo fatto, parla troppo da se medesimo; da questo dunque ogn'uno ne deduca ciò, che li piace. Sappiate però, che io non intendo tacciare universalmente gl'huomini di lettere, ma sempre dico, e dirò, che il non ben disciplinar le menti nella conoscenza del vero, produce gl'abbusi, che vi hò narrati.

Fil. Questo che dite è verissimo, ma ritorniamo al vostro particolare soggetto. Avete voi inviate le vostre opere in Francia, e nelle altre Accademie?

Dor. Non hò tralasciato cosa, che potesse condurre allo scoprimento di questa verità, e perciò inviai le mie opere a Monsieur de Fontanel allora secretario della celebre, e dottissima Accademia di Francia.

Fil. E che vi rispose?

Dor. Fece sembianza di disprezzar le mie proposizioni, ne mi rispose cosa alcuna.

Fil. Di grazia non mi tenete più sù questa nojosa idea

delle malizie d' alcuni letterati, perche io son certo, che frà gli huomini di lettere, non mancheranno, siccome voi avete detto, quei dotti, e sinceri amatori del vero, i quali non lasciandosi ingannare dalle trame de i pochi interessati ad oscurar la verità, che nella vostra invenzione si contiene, questa per vera, qual è, confessaranno. Lasciamo dunque da banda gli odiosi ragionamenti, e degnatevi di darmi i vostri precetti, acciò io possa divenire un vero, e costumato sapiente, qual si conviene essere.

Dor. Io vi dirò in breve, sù di una materia cotanto importante, i miei veri sentimenti, e poi vi narrerò il metodo, ch' io medesimo hò tenuto ne i miei studij, acciò possiate voi stesso seguirlo se vi aggradirà.

Fil. Dite di grazia Signor Doria mio.

Dor. Filotimo, acciò la mente sia disciplinata a conoscere il vero, non basta, ch'abbia acquistata la sofficienza d' intendere una dimostrazione, ma bisogna, che acquisti un tale abito a contemplare il vero, che più non possa ne per passione, ne per ignoranza obbliarlo. Questa è quella costanza, ch' è valevole a far sì, che la conoscenza del vero prevaglia sempre agli obblij, che l' ignoranza cagionano; ed a quei moti dell'animo, e delle passioni, che vagliono ad oscurar la mente: perchè, come vi hò detto nel secondo ragionamento, che tempo fà frà noi tenuto abbiamo, la mente umana è di tal fatta, che assai più volentieri indrizza i suoi discorsi a fine di ritrovar ragioni valevoli a lusingar la passione, che con animo indifferente si volga alla ricerca del vero; e quindi è, che la pura luce dell' intelletto ne viene oscurata. Filotimo, negli huomini la volontà, quasi che sempre strascina l'intelletto; ond'è poi, che questi volentieri abbracciano come veri quei falsi discorsi, che formano per giustificare le loro passioni, e i loro errori: e se gli huomini non fanno un abito d' operare direttamente opposto a questa perniciosa inclinazion della na-

natura, non possono mai divenir dotti, giusti, e sinceri.

Fil. Ma come può accader mai questo in geometria, dove le verità son così chiare, come 2, e 3 fan 5? Sia quanto si voglia grande la passione, ch' io non potrò mai negare, che 2, e 3 non faccin 5 Sig. Doria.

Dor. E' verissimo, che se siete sufficiente ad intendere una dimostrazione geometrica, non potrete lasciar d' intendere il vostro errore; e tanto più quando da alcuno vi viene avvertito: ma chi debolmente intende, di legieri il vero si dimentica, e chi è da passione agitato difficilmente intende; perciò se voi vi ponete, come vi siete poc' anzi posto ad esaminare una proposizione geometrica con forte volontà di ritrovarla falsa, la vostra mente tutta intenta alla passione, che l' occupa, si distornerà dalla contemplazione del vero; e perciò obbliarà quella medesima verità, che poco prima hà chiaramente conosciuta; e se avverrà, che mal grado la vostra passione, la verità sia alla vostra mente presente per modo, che non la possiate ignorare, cercarete a bello studio di obbliarla.

Fil. Ma quando poi ci penso, come si suol dire, a sangue freddo, o che mi venga avvertita; come posso lasciar di confessar la verità?

Dor. Quando la vostra mente è incostante, perchè mal disciplinata nella morale, e perche non hà fatto quel tal' abito, che è necessario a contemplar la verità, e il qual si richiede per rendere l' amore del vero più forte nell' animo, che ogni altra passione; ad ogni picciol moto della volontà vi dimenticarete, come hovvi detto, le verità dimostrate, che avete poco prima conosciute. Filotimo, gli huomini più facilmente si dimenticano, che si ricordano; e quando si ricordano, divengon dotti, e quando si dimenticano, divengono ignoranti, appunto come dice Platone; ond' è, che per resistere a questa infelice proprietà

dell' umano intelletto, bisogna fare un lungo abito a rammentarsi del vero per modo, che le passioni più non possano far sì, che la mente obblii se stessa, e la verità. Ma prima di tutto bisogna acquistar, per lo mezzo della ben studiata geometria la facoltà d' intendere; e poscia per mezzo dell' abito acquistar quella di sempre, e costantemente intendere; e quel ch' è più, acquistar quel costume di sempre confessar con ingenuità il vero, che s' intende; perche se questo non acquistate, mal grado ancora tutte le vostre conoscenze, si svegliarà in voi quella renitenza a confessare il vero, che poc'anzi si è in voi risvegliata; e vi contentarete più tosto di passar per ignorante nella mente de' dotti, che di confessare al volgo di aver errato: anzi (oh maraviglia Filotimo!) la Geometria, ch' è la più vera scienza, è quella, che appresta più largo campo alla malizia di esercitar le maligne sue arti; perchè sendo ella a guisa di un linguaggio particolare, ed inteso da pochi, questi pochi possono agevolmente intendersela frà essi, e far passare nella mente del vulgo l' ignorante per dotto, e il dotto per ignorante.

Fil. Non più di grazia Signor Doria, perche la mia mente abborrisce il racconto di sì fatte arti. Datemi di grazia un poco qualche insegnamento valevole a farmi acquistar quella costanza di mente nel conoscere il vero, che avete detto; perchè per quelle sì fatte maliziose arti, che avete narrate, vi è il tempo, il quale hà avuto dalla natura la facoltà inviolabile di toglier dal volto di tutti la maschera.

Dor. Nel secondo ragionamento ch' abbiamo altre volte frà noi tenuto, io vi hò già accennato qualche cosa di questo, che mi richiedete: con tutto ciò vò suggerirvi in breve alcuni precetti valevoli a somministrarvi quella chiarezza, e quella costanza di mente nel ragionare, che a buona ragione chiedete.

Fil. Di grazia.

Da

Dor. Da tutto quello, che ne i nostri ragionamenti detto abbiamo, voi avete ben inteso quanto necessaria cosa sia a chiunque vuole intraprendere l'importantissimo studio della sapienza, moriggerar prima l'animo nelle morali virtù; perche in altra guisa facendo, o la vana ambizione, o la bassa, e vile invidia vi spingono certamente a rompere in uno de i due scogli, ne i quali naufragano tutti coloro, i quali o con mente insufficiente, o con animo non moriggerato navigano per il mare della sapienza. Questi sì fatti scogli sono o la perniciosa sofistica, o l'ignorante scetticismo, o il voluttuoso epicureismo, che a mio credere è lo stesso, che lo scetticismo.

Fil. Ditemi di grazia Sig. Doria la ragione, per la quale voi pensate, che la sofistica, lo scetticismo, e l'epicureismo siano tutte false dottrine dal vizio della mente prodotte?

Dor. Se voi vi rammentaste quello, che abbiamo trà noi ragionato, non mi fareste ora questa richiesta.

Fil. E perchè?

Dor. Perchè se ben vi rammentate, hovvi detto, che la sofistica vien prodotta dal desio, che si desta nella nostra mente di dimostrar quel, che vogliamo, in vece di cercar di conoscere quel, ch'è vero; ed hovvi altresì detto, che l'immoderata ambizione di sembrar dotto; il vano fasto, la livida invidia, ed altre simili perniciose passioni son quelle, che son possenti a far sì, che la mente si affatichi nella ricerca di sofistiche ragioni, per giustificar dentro di se medesima le proprie passioni. Lo scetticismo e l'epicureismo poi son due perniciose sette, che non si possono nomar de' filosofi, a cagion, che nascono dallo stesso velenoso fonte, dal quale scaturisce la sofistica; ed ecco come la sofistica nasce dal desio di far vedere come vere quelle cose, che noi vorressimo, che vere fossero; e l'epicureismo, e lo scetticismo nascono dal desio di distruggere la scienza; ond'è, che ambedue son

pro-

prodotte dal desio di soddisfare alle proprie passioni.

Fil. E come?

Dor. Li scettici sentendosi di quella lena mancanti, che è necessaria per salire a quell' alto, e scoscesо monte, dove il tempio della sapienza risiede; volentieri si persuadono altro non esservi sù di quel monte, che una larva. Gli voluttuosi epicurei poi tirati da i piaceri, che i sensi appreſtano, si lusingano di trovar ne' sensi la felicità; e con ciò, per lo mezzo di sensuali ragioni, si affaticano di persuadere a lor medesimi, che non vi sia altra sapienza, che quella, che per lo mezzo de i sensi s'acquista; ond' è, che molti sono sofistici, altri ingegnosi, e sottili nel ragionare più di quel, che si conviene, altri pigri, e grossolani; ma sempre son sofistici tutti quelli, che non van dritto alla conoscenza del vero unico.

Fil. Ma v'è chi dice Sig. Doria, che questa sapienza, che voi pretendete, che con astratta dimostrazione s' intenda, in vero non si ritrovi.

Dor. Si ritrova Filotimo; vero è bensì, che bisogna con buon metodo ricercarla; ma non è questo il tempo, nel qual voi dobbiate bel bello trarmi a ragionar della filosofia. Noi in questi nostri ragionamenti abbiamo impreso di ragionar solamente intorno alla geometria, e a quei mezzi, che dobbiamo adoperare per ben disciplinar la nostra mente in quella, non mancherà tempo, se così a Dio piacerà, che vi farò con evidenza conoscere il vero di quant' ora vi hò asserito.

Fil. Avete ragione. Ditemi dunque per ora solamente il metodo, col quale voi volete, che di bel nuovo io studij la geometria; e degnatevi altresì di consigliarmi a qual filosofia io debba appigliarmi, dopo che sarò bene nella geometria esercitato.

Dor. Dovete rammentarvi per primo, che le nostre conoscenze nascono, come vi hò detto, dalle reminiscenze, e i nostri errori dagli obblii; e che queste sì

fat-

fatte reminiſcenze ſi acquiſtano coll'abito di ragionare, e ſi perfezionano con la rifleſſione; perciò ſeguendo noi l'ordine di ragionare, che la natura ha poſto nella noſtra mente, dobbiamo prima cominciare a formar abito di mente a ragionare; poſcia, richiamando alla noſtra reminiſcenza quello, che la mente hà fatto ragionando, confermar con la rifleſſione l'abito di mente a ragionare, che abbiamo acquiſtato: ma per acquiſtar queſto sì fatto abito di mente a bene, e ſicuramente ragionare, vopo è, che la mente mediti intorno agl'errori, ne i quali ella è inciampata ragionando, e intorno alle cagioni, per le quali ha errato. Alla perfine vopo è, che rientrando la mente in ſe ſteſſa divenga tratto tratto giudice di ſe medeſima, e ſuperiore a quelle materie medeſime, che contempla: In conſeguenza di queſto voi dovete Filotimo prima leggere, come già avete fatto, gli elementi di Euclide, per abituare in queſta guiſa la voſtra mente a ragionar per dimoſtrazione dedotta, *à notis ad ignota*. Di poi per riſvegliar le reminiſcenze voi dovete attentamente leggere quel comento, o ſiano quelle rifleſſioni, ch'io tempo fà vi feci fare ſopra Euclide, e quelle leggi d'argomentare in geometria, che vi hò fatto fare da voi medeſimo; e finalmente di sì fatte conoſcenze monito, ſtudiar la ſeconda volta Euclide, perchè allora lo leggerete, non più come diſcepolo, ma come voi ſteſſo foſte l'inventore di quelle propoſizioni medeſime, che avete da lui imparate. Poſcia per accoſtumarvi a non errare in geometria, dovete prendere una ſcienza, come per eſempio, i sferici di Theodoſio, o Pappo Aleſſandrino, o altre; e leggendo ſolamente le propoſizioni, affaticarvi di farci voi ſteſſo la dimoſtrazione: indi veder nell'autore ſe avete errato, e ſe ritrovate di àver errato, meditar ſopra la cagion dell'errore, nel quale ſiete inciampato; ed altre volte dovete affaticarvi d'indovinare qual debba eſſere nell'autore

la

la propofizione, che fiegue all' antecedente, per acco-
ftumarvi a dedurre proprietà, da proprietà, ed inventare, fempre però meditando fopra il vero in generale, e fopra gli errori, che prendete, e ciò a fine di emendarvi. Dovete ancora efercitarvi nella foluzion de' problemi, e prima di publicarli, confiderarli a mente chiara, per formar abito ad emendarvi da voi medefimo; e fempre meditare fopra la cagione degli errori, che avete prefi, ed effer fempre pronto a ricever l'emenda da ogn'uno, che di alcun'errore vi avvertiffe. Finalmente, Filotimo, bifogna nel difciplinar la mente umana nelle fcienze, far come chi infegna un fanciullo a natare; il fuo maeftro prima deve, con la mano reggendolo, infegnarli le regole di ben natare, e far sì che fenza molta rifleffione formi un abito al natare; poi farlo natar da fe folo, ne mai follevarlo, fe non quando è caduto; e poi farlo riflettere fopra la cagione, per la quale è al fondo precipitato; in quefta guifa facendo voi con la mente, l' accoftumarete ad emendar da fe fteffa i fuoi proprij errori, e cóchiuderete agevolmente quali fiano le regole, che fon valevoli a condurla per il dritto fentiero del raziocinio, e formarete a voi fteffo un metodo di ben ragionare. Per acquiftar poi quell' importantiffimo abito a non lafciarvi corromper la mente dalle paffioni, dovete fare un ferio efame al voftro animo, e vedere, fe l foverchio defio d' inventare per pompa d' ingegno, o fe l' invidia, o altra paffione fia ftata del voftro errore cagione; e fe trovate alcuna di quefte effer ftata la cagione del voftro errore, dovete prima arroffirre dentro di voi medefimo, e poi, per formar abito alla confeffione del vero, dovete confeffare ingenuamente a tutti gli errori, che avete prefi; e in quefta guifa caftigando il voftro animo, accoftumarlo a non più ribellarfi alla ragione. Dovete poi effer efatti, e paziente nell' efame delle cofe, che avete ritrovate per emendar gli errori, che il fuoco fteffo dell' eftro produce, e

non

non amare il difficile inutile, ma abborrire il facile pernicioso; e perciò fuggire, come vi hò detto, dall' Algebra speciosa, e da i nuovi metodi da alcuni moderni inventati, i quali accostumando bel bello la mente al semplice pratico, non la disciplinano nell' arte di ben ragionare, ma la corrompono: e dovete altresì fugir dall'eccesso, nel quale cadono alcuni moderni, cioè di credere utili quelle specolazioni, che niun utile producono, a cagion che in pratica non si riducono. Disciplinata in questa guisa la vostra mente sarà ella egualmente atta a ragionar nell'astratto, che a discendere al sensibile, e pratico; e per ciò potrete con mente atta, e sufficiente far passaggio dalla geometria all'importantissimo studio della filosofia, incominciando dalla logica, e dalla fisica per inalzare bel bello, e non tutta ad un colpo la vostra mente alle astrattissime, e pure meditazioni: poscia potrete salire all'utilissimo, e quasi divino studio della metafisica, corollarij della quale sono la morale, la legge, e la politica. Nello studio della metafisica dovete, come avete fatto in geometria, con ordine geometrico studiarla; ma utile cosa sempre sarà, che beviate a i fonti, e perciò la studiate in Platone; e la cagione, per la quale io voglio, che voi in Platone studiate la filosofia, si è, perche quello, per mio avviso, è quel filosofo, che si può assomigliare ad un vasto oceano di scienze: E in vero egli non mica ristringe la sapienza alla sola conoscenza dell'esistenza di Dio, verità che è stata nota a tutti gl'antichi, fuorche a pochi cervelli stravaganti, e da niuno riputati; ma nel Parmenide immerge la vostra mente nelle ampie meditazioni delle infinite idee, e degl' infiniti divini attributi, e con ciò vi fà formar l'ampia idea di Dio, e quella dell'huomo creato a sua imagine, e similitudine. Di poi vi spiega il mondo fisico, ed intelligibile nel Timeo, e non mica và investigando gl'occulti secreti della natura per lo mez-

zo di false; e capricciose ipotesi, che pone; ma deduce la natura de i particolari dalle conoscenze universali della metafisica. Vi addita poi nel trattato della Repubblica la divina origine, dalla quale le leggi discendono nella nostra mente; e in consequenza di ciò voi ravvisate la natura, e l'essenza della civile società. Vi fà formar poi l'idea del principe ottimo nel trattato *de Rege*, ove v' addita la perfetta educazione, che aveano i Re di Persia: Vi mostra l' onestà, che si dee usare ne i convivij, e tanti, e tanti altri lumi di sapienza, che troppo lungo fora tutti narrare: ed alla perfine non tralascia alcuno di quei particolari, che sono necessarij a sapersi, per conservare la civiltà nell' umana società.

Fil. Piano Sig. Doria; questo Platone da voi tanto vantato, passa nella mente d' alcuni moderni per un cervello stravagante, e chimerico, per modo tale, che coloro i quali più lo vogliono favorire, lo chiamano un filosofo poeta. Non dico poi, che Monsieur de Fontanel, (e questo in vero mi sembrò troppo, quando lo lessi nel suo discorso della scienza degl' antichi, e de' moderni) disse, che noi siamo obbligati a i moderni per averci liberati dalle sciocchezze di Platone.

Dor. Oh Filotimo! Che vi sembra egli di una sì stravagante proposizione? Di questa non si deve ne meno ragionare, perche parla da se stessa, e mostra a bastanza il valore del suo autore: ma sapete perche sembra oscuro Platone a sì fatti huomini? perche hà inteso di scrivere a i dotti, ed hà voluto esser letto da cervelli grandi, e capaci della sapienza; e perciò non si è affaticato di preparare per i stomachi deboli certi cibbi leggieri, e conformi alle loro deboli forze; ma hà voluto, che gl' huomini facessero da lor medesimi le dimostrazioni a quelle proposizioni, ch' egli sparge ne i suoi libri; ciò che si può fare, quando. l' huomo è perfettamente istrutto nella geometria sintetica, ed abituato non ne i calcoli,

li, ma a ragionar con raziocinio sintetico sopra qualunque materia, che si para avanti alla sua mente.

Fil. Sig. Doria mio, voi proponete cose troppo difficili, quando proponete, che si faccino le dimostrazioni alle oscurissime proposizioni di Platone, la maggior parte delle quali saranno certamente indimostrabili.

Dor. Io non vi propongo cosa, che non abbia io medesimo fatto.

Fil. E come?

Dor. Rammentatevi, che nel libro della Vita Civile, e dell'Educazione del principe da me pubblicato l' anno 1710. considerando io quel detto di Platone, col quale egli ci avisa, utile cosa esser per la felicità de i regni, che i Re siano sapienti, cioe: *aut reges philosophare, aut philosophos regnare*; promisi di fare una metafisica buona da studiarsi da' principi: questa la Dio mercè, e malgrado le nojose contese, che hò sofferte per le mie invenzioni matematiche, l' hò al bramato fine condotta, ed hò in quella fatte le dimostrazioni a quelle proposizioni di Platone, che sembravano paradossi, e poetiche fantasie a quei moderni, che voi avete nomati. Fate ora voi Filotimo quello studio sopra la Geometria sintetica, che vi hò accennato poc'anzi; e poi vedrete, che non solo intenderete i filosofi più oscuri dell' antichità, ma che qualunque scienza, che prenderete a studiare, qualunque particolare, ch' esaminarete, vostra mente saprà a suoi principij ridurlo, e trarne da se med[illegible] ma tutte le utili consequenze, che da quella si possono trarre: Con questo metodo di studiare poi obbliando voi a poco, a poco quelle stesse cose, che nell' autore avete lette, farete tanto la scienza di voi propria, che la possederete in guisa tale, come l' aveste voi stesso inventata, e come se mai nell' autore di quella l' aveste studiata. In questa guisa voi studiando acquistarete un abito di ridurre a i suoi principij qualunque ma-

teria, che la vostra mente prende a contemplare; in ogni cosa argomentarete dalle cause, farete da voi stesso la dimostrazione a tutte le proposizioni, che si parano avanti la vostra mente, e giudicarete giustamente degli effetti, che le cause devono produrre; e studiando con questo metodo la dottrina degli antichi, vedrete come dall'alto, da dove discendono, tutti i rivi di moderna sapienza, che noi ora con stupore miriamo. Fatta in questa guisa la vostra mente geometrica, e metafisica, dovete dedurre il pratico dalla teorica, il sensibile dall'astratto, e perciò dovete dopò studiata la metafisica, studiare i costumi, e le passioni degli huomini; perchè non conviene ad un huomo del vostro stato divenir filosofo insensato, ma dovete praticare il mondo, e praticando meditar sopra le cagioni degli errori degli huomini: viaggiando studiar sopra gli ordini civili e militari, le leggi e le politiche delle diverse nazioni, siccome saggiamente usavano di fare gli antichi greci, e romani, e sopra tutto procurar d'emendare in voi quegli errori, che meditando ritrovate negli altri. Non dovete pretendere di suffogare in tutto le passioni, perche queste sono identificate con l'huomo dal momento, che l'anima si veste di corpo; ma dovete per lo mezzo della filosofia, dare alle vostre passioni forma onesta, e nobile; e perciò dovete amare con passione il giusto, e l'onesto, e la gloria del vostro nome, non meno appresso i viventi, che appresso i posteri; e in conseguenza di così fatte massime, dovete esser onorato, e zelante cittadino della vostra patria, ubbidiente alle leggi di quella, amico leale, sincero, ed onesto con tutti, e sempre giusto: In questa guisa Filotimo, farete prima disciplinato in geometria, poscia in filosofia addottrinato, e dalla pratica del mondo perfezionato per modo, che diverrete filosofo utile a voi medesimo, ed alla repubblica. Sarà ancora cosa utile, che, siccome

come hovvi detto poc'anzi, non ignoriate lo studio della fisica, e dell'astronomia; perche nello studio di quelle contemplando l'ammirabile struttura, e l'ordine, e l'armonia incomprensibile dell'universo, si forma per mezzo dell'imagine una sensibile idea dell'onnipotenza, e delle perfezioni di quel Dio, del quale avete fatto un idea pura intellettuale, ed astratta in metafisica. Dovete poi studiare la geografia, l'arte nautica, e l'arte della guerra, essendo queste, conoscenze, che contribuiscono a formar l'huomo colto, e civile. Necessaria cosa è poi, che vi siano degli huomini, i quali applichino alle esperienze fisiche, e alle arti, che dalle sopradette conoscenze si deducono; ma, a mio credere, non dovete esser voi di quelli, avendovi la natura a più nobile, e più elevata sorte destinato.

Fil. Voi mi avete fatto conoscere con questi saviissimi precetti il modo, col quale si deve formare un nobile, e virtuoso cittadino, e come la vera scienza dalla Geometria discenda.

Dor. Non senza ragione dicevano Platone, ed Aristotile, *nemo Ageometra intret in gymnasio meo*; ma per geometra non intendevano l'algebrista, o il calculatore, ma il raziocinante, cioè a dire la mente ben disciplinata in geometria sintetica, che vale a dire quella mente, la quale si è abituata a ragionar sopra le cose tutte con ordinato raziocinio geometrico, e a dedurse i particolari tutti da i loro veri principij.

Fil. Avete ragione, ma questo vostro metodo è austero, e difficile, e da seguirsi da pochi.

Dor. Lagnatevi colla natura, la quale hà inceppata di modo la mente ne i sensi, che non hà bisogno di minor disciplina di quella, ch'io vi hò prescritta, per raziocinar perfettamente, e per acquistar quella libertà d'animo, nella quale solo l'essenza dell'huomo consiste. In somma Filotimo, se volete studiare per esser dotto, avete da vincere quella difficoltà, che la

la natura hà posta incontro a chi vuol conseguir la sapienza, e la virtù: se poi volete studiare per parer dotto senza esserlo, molti son quei letterati, i quali ad altro non studiano, che ad inventar modi agevoli, e facili per acquistar la scienza, e perciò ricorrete a quelli; imperciocche se volete seguire i miei consigli, calcarete la via dagli antichi additata, e vi affaticarete di ritrovar solamente quelle cose, che gli antichi si sono dichiarati di desiderare, come appunto è la Duplicazione del Cubo da me ritrovata; e se non potrete supplire a quello, ch' essi han desiderato, vi contentarete d'intendere la loro sapienza, e d'imitare le loro umane virtù, senza corrompere la purità delle scienze per lo vostro particolare, e vano desio di comparire al mondo inventore.

Fil. Signor Doria, voi avete destato in me un fervente desio di leggere questa vostra Metafisica, perche alcuni de' vostri medesimi contradittori a fine di evitar la taccia d' ingiusti, della quale potevano a buona ragione temere a cagione delle ingiuste opposizioni, che facevano alla vostra Invenzione geometrica, ostentavano un apparente sincerità nel confessare i vostri preggi nella scienza metafisica, e dicevano, che tanto prevalete in quella, quanto siete scarso, e mancante nella geometria.

Dor. Mostravano di poco intendere di metafisica, perche, come hovvi poc'anzi detto, per sentimento di Platone, e d'Aristotile alle conoscenze della filosofia non s'ascende, se la mente non è perfettamente perfezzionata in geometria; ma che volete fare Filotimo? in ciò che riguarda alle scienze a' nostri dì è facile il dare ad intendere, perche in virtù de i nuovi metodi di studiare, molti son quelli, che non intendono la essenza delle scienze, e molti ancora quelli, che intendendola, non vogliono prender briga.

Fil. Il mondo è sempre stato lo stesso Sig. Doria.

Dor. Questo, che voi dite Filotimo, è errore, il mondo è sem-

è sempre diverso; vi è stato un tempo, nel quale hà trionfato la sapienza, e la virtù; un altro, nel quale hà trionfato l' ignoranza mista ad una naturale sincerità; un altro, nel quale hà trionfato la falsa sapienza alla malizia congionta. Leggete il corso dell' istorie, e vedete se il tempo di Scipione è lo stesso, che quel di Mario, e di Scilla; e se quel di questi lo stesso, che quel d' Augusto; se quel d' Augusto lo stesso, che quel de i barbari; e se quello de i barbari lo stesso, che il nostro? Filotimo, vi è stato nel mondo tempo di sapienza, tempo d' ignoranza, e tempo di malizia ed apparente virtù.

Fil. Oh voi vorreste l' huomo, come dee essere, questo rimane nella nostra idea Signor Doria mio; ed il più sano consiglio è quello, di lasciar l'huomo come è.

Dor. Nò Filotimo, di nuovo in errore inciampate; l' huomo si dee considerare in trè modi, cioè, per quello, che dee essere; per quello, che puol essere; e per quello, ch' è; e chi lo vuole per quello, che dee essere, cioè perfettissimo, resterà sempre deluso nelle sue speranze; ma chi trascura di farlo come puol essere, lasciandolo com' è, dal quale stato sempre precipita da peggio in peggio, erra egualmente, che quelli, che lo vogliono in tutto, come dee essere, cioè perfettissimo. Questa vostra sentenza è il fonte, dal quale tutti i moderni abusi scaturiscono; che sia così. L' huomo odia il riflettere, ed il raziocinare; e li sign. matematici per dispensarlo da questa penosa fatica, l' insegnano per lo mezzo dell'algebra a raziocinar colla penna: quindi è, che poi resi pigri anco nello studio delle altre scienze, e nell'esercizio delle virtù, volentieri si appigliano al partito di trattar chimeriche le profonde speculazioni, e da inutili, ed affettate le rigorose virtù, che praticavano le antiche virtuose repubbliche; ma questo sarebbe un troppo lungo ragionamento.

Fil. Ora Sig. Doria dite pur quel, che volete, che le passioni trionferanno sempre della verità, e della ra-

gione; e l' amor di comparir dotto con poca fatica, farà sì, che sempre si ricevano con più applauso quei metodi, che ci dispensano da quella, che quelli, che ci obbligano a star fermi sù quel stretto, e diritto cammino, che al vero conduce.

Dor. A questo ci dovrebbero pensar coloro, i quali han cura di rivedere i libri; e siccome ad altro non pensano, se non che a vedere, se i libri, che si pubblicano offendano S. Chiesa, o i dritti del principe; così dovrebbero considerare ancora se le dottrine, che si pubblicano, introducono novità perniciose allo studio delle scienze: perchè dovete sapere, che le scienze, quantunque oggidì si considerino da molti solamente come un nobile trattenimento, hanno però la maggior parte nell'officio di formare il buon ordine delle repubbliche; e perciò oltre quello, che si esamina, si dourebbe esaminare se le cose, che si pubblicano, sono vere, nuove, ed utili, perche quando una di queste manchi; le cose, che si pubblicano, o sono inutili, e servono solamente a riempir le biblioteche con danno de' giovani studiosi, perche non sanno a qual metodo appigliarsi per ben diriggere i loro studij; o sono perniciose a cagione delle false dottrine, che insegnano.

Fil. Voi appresentate alla mia mente una troppo ampia materia di ragionare, e per ciò io vorrei, che mi diceste .....

Dor. Nò Filotimo, vogliam ora far fine a questo ragionamento, altrimente andarebbe a lungo più di quel che si conviene. Ecco dunque, ch' io hò sparsi i buoni semi, il Ciel gli fecondi, e voi attendete a guidar la mente ne i vostri studij per vie rette, e sicure, e vivete felice.

FINE DEL TOMO PRIMO.

LETTERA

DI

PAOLO-MATTIA

DORIA

A N. N.

Nella quale si risponde a due articoli, che si leggono nel Libro intitolato

Actorum Eruditorum, quæ Lipsiæ pubblicantur, supplementa, tomus VII.

Roppo più, di quel ch' io merito per le mie Opere, obbliganti, e gentili sono le efficaci maniere, colle quali nella vostra gentilissima lettera Sig. N. N. vi affaticate di persuadermi a pubblicare, per lo mezzo delle stampe, la mia Metafisica, e le obbiezzioni da me fatte a Benedetto Spinosa: E in vero io dourei, senza punto replicare a' vostri comandamenti, ubbidire; ma siami lecito pur dirvi, che quantunque voi pensiate, che nella Metafisica da me fatta, qualche cosa di buono, e di nuovo si contenga, pure, come amico della mia quiete, douresti più tosto persuadermi a celarla il più, che mi sia possibile, ch' espormi per cagion di quella a i morsi, e a i dispregi di alcuni huomini di lettere, i quali, al solo vedere nell' altrui invenzioni qualche sentenza alla loro scienza contraria si sdegnano, si ristuccano, e riguardono l' Inventore, come un nemico assalitore del loro regno; e senza prima con retto giudicio esaminarla, precipitosamente gl' altrui nuovi ritrovati rigettano; e quel ch' è peggio, dopo che s' avveggono d' aver errato riggettandoli, qual huomini men che sinceri non si vergognano di negare a i non intesi di Geometria le verità, che conoscono. E in vero Voi sapete, quanto io abbia, più di quel che mi era bisogno, sofferto, per cagione della Duplicazione del Cubo da me pubblicata molti anni sono. Ma che! credete Voi che siano terminati i nojosi contrasti? Leggete, di grazia, a carte 168., e 210. del libro, che v' invio, intitolato *Actorum Eruditorum, quæ Lipsiæ publicantur, Supplementa Tom. VII.*, che subbito mi vedrete colà dipinto nella figura di un Innovatore ingannato, e incorregibile: Vedrete quel incivile Relatore del mio Nuovo Metodo pubblicato l' anno 1715., ferito da miei Dialoghi pubblicati l'anno 1718., uscire in campo mascherato, perchè nella figura di anonimo, a difendere, con stiracchiate ragioni, e con incivili termini di parlare la sua mal concepita Relazione; ed affaticarsi sem-

si sempre più per meritare il titolo d' invidioso; e di mal costumato. Leggete le obbiezioni, ch' egli fà nel capitolo *Ad Dialogos Pauli Matthiæ Doriæ*, a i miei Dialoghi, e poi ditemi, se devo, o no, di bel nuovo esponere il mio animo a nuove inquietitudini.

A queste mie ragioni sò, che direte, che non deve il mio animo lasciarsi punto turbare dalle altrui mormorazioni: Mi direte, che nulla importa, che un Relatore invidioso a me s'opponga, e che una schiera di matematici tutta interessata per sostenere le sue mal' intese Invenzioni, e le false dottrine, che insegna, frà essa si colleghi, e si alzi a rumore contro di me. Sono queste belle ragioni in vero; ma in un' animo libero, e sincero, qual' è il mio, l' altrui ignoranza, e l' altrui invidia non solo producono disprezzo, ma svegliano ancora quella nobil'ira, che i Filosofi, e i Poeti han permessa agli animi nobili, e che il Santo Evangelo permette ancora a noi Cristiani di usare, senza peccato, contro i maliziosi, e mal costumati huomini: ma perchè, di grazia, soffrir quest' ira ancorche giusta? forse per combattere con alcuni huomini ne i falsi metodi di ragionare abituati, e fastosi, da i quali non si può sperare ne giusto, ne sincero giudicio delle altrui Opere? In pruova di ciò, e a fine di alleviarvi la fatica, voglio additarvi quì in breve le maliziose arti, i modi men che costumati di ragionare, e tutto ad un tempo, le manifeste contradizioni, nelle quali inciampa il Relatore del mio Nuovo Metodo in quella sua picciola dissertazione intitolata *Ad Dialogos Pauli Matthiæ Doriæ*.

Ma acciò veggiate quãto grande sia la disgrazia di quegl'Inventori, i quali colle loro Invenzioni offendono quei Metodi, sù de i quali hanno inalzata la mole della lor gloria poc'men, che i matematici tutti: Voglio narrarvi le obbiezioni, che i celebri, e dottissimi Sig. Autori degl'atti di Lipsia in questo stesso Tomo VII. de i supplementi fanno ad una certa mia lettera, che nell'anno 1718. indirizzai al Signor Giacinto di Cristofaro; e voglio narrarvele, acciò possiate dalle mie risposte chiaramente conoscere,

con quanto orrore, i sig. matematici d'oggi dì, mirino le mie Invenzioni, solamente a cagione, che sono a i Metodi da essi ricevuti in tutto nocive: Ed acciò questo apparisca più chiaro, necessaria cosa è, che prima io vi narri le cagioni, per le quali l'anno 1718., indirizzai quella lettera al Sig. Giacinto di Cristofaro, per poi narrarvi gli abbagli, ch'essi prendono.

Io pubblicai l'anno 1715. la ristampa del mio nuovo Metodo, e la pubblicai a cagione, che nella prima impressione tutte le dimostrazioni non erano ancora cotanto chiare, quanto era necessario, che fussero in una Invenzione, la quale si fattamente nuoce a quasi che tutti li sig. moderni matematici, che ricusano di confessarla per vera, anco quando con invincibili dimostrazioni si fà ad essi chiara. E per secondo la pubblicai a fine di esporre al giudicio del pubblico le obbiezioni de'miei Contrarij, le quali, per seguire quell'amore del vero, che hò sempre nel mio animo nutrito, io aveva con grandissimo stento, e con efficacissime istanzie da essi ottenute. Pubblicai dunque la seconda volta il mio nuovo Metodo insieme colle loro obbiezioni, e colle mie risposte, e con una lettera da me diretta al celebre fù Sig. D. Antonio Monforte, eleggendolo per giudice delle differenze con miei Contrarij; ed altresì la sua risposta a me diretta, nella quale approva egli il mio Metodo, ed impugna espressamente le obbiezioni di quelli. Tutto questo si legge nella nuova impressione del mio Metodo fatta l'anno 1715.

Questa mia novella impressione però fù sfortunata di tanto, che i Sig. Autori degl'atti di Lipsia, senza esser stati prima da me, benche in menoma cosa offesi, ne fecero quella, parziale a miei Contrarij, e a me ingiuriosa relazione, che si legge ne i loro atti dell'anno 1717. All'ora provocato io, ed a gran ragione, dall'ingiusto disprezzo, col quale aveano narrata la mia Opera. Pubblicai nel 1718. i miei Dialoghi, ne i quali m'affaticai di appalesare al Mondo l'ingiustizia, che meco avea usato quella, per altro celebre, e sempre con tutti cortesissima Adunanza, e mi

affa-

affaticai d' insegnare al mio Giovane interlocutore il modo, col quale si devono esaminare le proposizioni sinteticamente dimostrate; e tutto ciò feci a fine di rendere, almeno i giovani sufficienti a conoscer la verità, che nelle mie dimostrazioni si contiene,e di opporsi in questa guisa alle magistrali assertive, che ad essi fanno i loro falsi maestri.

Erano le cose in questo stato, quando meditando io sopra la cagione, per la quale avveniva a me questa particolare disgrazia di dover sostenere una disputa in materie geometriche:Pensai, a fine di giustificare in qualche modo la renitenza, che i sig. matematici facevano comparire nell'approvare il mio Metodo; pensai dico, che forse il Metodo degl'Indivisibili, del quale mi era avvaluto, potesse esser stato di questa mia disgrazia la cagione: E in vero dissi frà me medesimo,le dimostrazioni fatte per lo Metodo degl' Indivisibili sono legitime,e vere,quanto quelle fatte per lo metodo di Euclide; ma con tutto ciò, quantunque appaghino la mente, non soddisfano l'immaginazione al par d' Euclide, e ciò a cagione, che nel Metodo degl' Indivisibili è forza meditar le linee divise in punti, o parti infinite, le quali sensibilmente non si possono in parti infinite dividere. Questo adunque è, dissi frà me stesso, il perchè questo Metodo rende appunto, come dice il Signore Arnaldo, i suoi seguaci soggetti ad inciampare in parallogismi; e in consequenza di ciò a produrre qualche disparità di sentenza frà geometri; quantunque poi quella debba subito dileguarsi, perche non si può, senza fare ingiuria alla purità della Matematica, lungamente disputare in Geometria.

Per sì fatte considerazioni adunque si destò in me un disio di dimostrare, se mi fusse stato possibile, per la via ordinaria d'Euclide, il mio assunto: Laonde andai meditando sopra l'accennato soggetto, e mi riuscì di ritrovare una dimostrazione fatta sopra la IV. proposizione del VI. d' Euclide: ma poi seguendo il mio costume, ch'è quello di sempre affaticarmi a prevenir quello, che contro le mie

mie dimostrazioni possan dire gli Avversarij; vidi, che quella dimostrazione non era in tutto convincente, non già per ciò, che riguarda la proposizione, ma solamente per ciò, che s' attiene al rigore della dimostrazione; perloche feci a me medesimo quella opposizione, la quale certamente quei medesimi Signori, che a me s'oppongono, non avrebbero fatta.

Ora io da questo ritrovato presi occasione d' indirizzare l' anno 1718. al Sig. Giacinto di Cristofaro una gentile, ed obbligante lettera, ch'è quella, della quale i Sig. Autori degl' atti han fatto ora l' estratto unitamente colle lor'opposizioni. Ma quì è da sapersi, ch' io non ad altro fine indrizzai al Sig. Giacinto quella lettera, se non per quello di obbligarlo con cortesi maniere ad appalesarmi in scritto i suoi sentimenti; perch' io sapevà, ch' egli nel tempo stesso, che ragionando, dissapprovava la mia Invenzione, dissapprovava ancora le opposizioni de' miei Contrarij, e si vantava di sapere esso solo le vere obbiezioni, che al mio Metodo si convenivano. In quella io ragionava scarsamente al Sig. Giacinto, a fine di darli motivo di prendere argomento di rispondere, e di oppormi: Ma egli più accorto, che gli Sig. Autori degl' atti, s' appigliò al partito di fare il grave in apparenza, e schifò il colpo; ma poscia in quel suo picciol libro, che pubblicò l' anno 1720. intitolato *Della Dottrina de' triangoli*, comparve nella figura di maestro, e decise asserendo, senza alcuna pruova, contro di me: Laonde poi ne avvenne, ch' io mi tenessi obbligato a far palese al Mondo, ch' egli non poteva esser giudice delle mie Opera, e questo lo feci chiaramente conoscere nella lettera, da me pubblicata l' anno 1721. dimostrando i manifesti errori, ne i quali egli era inciampato nelle materie più facili della Matematica, come appunto è la Trigonometria: Ma perchè io sempre desiderava dimostrare per la via ordinaria d' Euclide le mie proposizioni, perciò pubblicai alcune mie Esercitazioni geometriche, nelle quali con invincibili dimostrazioni fondate sopra

pra la XIII. del VI. d'Euclide, e sopra Archimede, dimostro, che la Parabola Apolloniana non hà le proprietà, che se le assegnano, ma che il solo, e vero luogo delle radici delle ascisse dell'asse, è quello de' miei Rettilinei parabolici piani: Ma di queste mie Scritture i Sig. Autori degl' atti non fanno alcuna menzione, forse a cagione, che ben conoscono avere io in quelle conseguito il mio fine, il qual' era di dimostrare per la via ordinaria d'Euclide la mia Proposizione: ma con tutto ciò, quantunque essi Signori si siano più alla lettera da me diretta al Sig. Giacinto di Cristofaro, che alle altre appigliati, pure farò conoscere, che tutte le proposizioni, che hò in quella lettera asserite, sian vere.

Ora dopo questa narrazione, ch' io vi hò fatta dell'origine, e cagione dell'accennata lettera, della quale, opponendo, han fatto relazione i Signori Autori degl' atti di Lipsia, io potrei risparmiare a me stesso l'incomodo di accennarvi le risposte a tutti gl' abbagli, che prendono nelle opposizioni, che fanno alle dimostrazioni contenute in quella mia lettera, perchè tutte queste risposte si trovano già da me prevenute nella Raccolta, e nella Dissertazione da me pubblicate l'anno 1721. Ma vi è poi un altra più possente cagione, la quale aurebbe dovuto rimovere il mio animo dal rispondere alle obbiezioni, che si leggono in questo Tom. VII. de supplementi, ed è, ch' io veggo chiaramente, che i Signori Autori degl' atti si dividono dal Relatore del mio Metodo dell'anno 1715; perch'egli solo è, ch' esce in campo nella figura d'anonimo a sostenere la sua relazione, e offende, per quanto può, il mio Metodo, e i miei Dialoghi: All'incontro i Sig. Autori degl'atti in questo medesimo libro de'supplementi di nuovo rapportano quella medesima, a me per altro in qualche parte vantagiosa relazione, che ferono de' miei Dialoghi nell'ultimo tomo de'loro atti. Ora questo non è certamente senza mistero, perche sembra, che vogliano far conoscere, che la lor sentenza intorno a i miei Dialoghi non è conforme a quella del Relatore. Oltr' a ciò nella relazione

ne, che fanno della lettera da me diretta al Sig. Giacinto di Cristofaro, nella quale mi oppongono, il Relatore ragiona in suo proprio nome, *si quis a me quærat &c.*, ciò che non sogliono usare gli Signori Autori degl' atti nelle loro relazioni: per la qualcosa io non sò, se devo rispondere all'anonimo, o a quella celebre, e dottissima Adunanza. E' certissimo però, ch' io non mi darei briga di rispondere ad uno anonimo, se non vedessi le obbiezioni impresse nel libro de' supplementi degl'atti; la qual cosa mi da a credere, che in nome dell'Accademia siano state fatte, tanto più ch' essi son quelli, i quali fecero la relazione de' miei Dialoghi, dove dissero espressamente; *quantum finem suum sit consequtus, alicubi commodius inquirendi occasio erit:* così cunque io intanto rispondo a quelle obbiezioni contenute nella relazione dell' accennata lettera, in quanto che le riguardo come fatte in nome de i dottissimi, e da me riveriti Signori Autori degl'atti.

All'incontro a quello incivile Relatore del mio Metodo, autore anonimo di quella picciola dissertazione, il di cui titolo è *Ad Dialogos &c.* rispondo solamente a cagione, che mi credo tenuto di far conoscere al mondo, che se hò ne' miei Dialoghi alquanto acremente ragionato contro i da me riveriti Autori degl'atti, la di lui ingiusta, ed incivile relazione me ne ha porto giustissimi motivi. Narriamo ora quello, che'l Relatore dice, in sua difesa, contro i miei Dialoghi.

Tutte le opposizioni, che'l Relatore mi fà in detto suo picciolo trattato *Ad Dialogos Pauli Matthiæ Doriæ*, che si legge a carte 210. del libro intitolato *Actorum Eruditorum, quæ Lipsiæ publicantur, supplementa, Tom. VII. an.* 1721., si riducono alle seguenti.

Per primo, ch'egli non hà avuto altro fine, se non di fare una mera relazione del mio Metodo, nella quale dalla sola lettura delle obbiezioni de' miei Contrarij, si potesse conoscere il valore delle mie dimostrazioni, ed aggiunge, che quelle parole; *Alij judicaverint*, da esso usa-

te nella relazione, che fece del mio Metodo, e delle obbiezioni de'miei Contrarij, siano mera relazione, e non obbiezione a quello, siccome io, al suo dire, hò preteso di far credere. Tutto questo si legge nel primo, e secondo paragrafo.

Per secondo s' affatica di difendersi dalla giusta taccia, ch' io le dò ne' miei Dialoghi, d'huomo invidioso, e parziale de' miei Contrarij; ed in si fatta occcasione, motteggiandomi, dice, che un huomo come me, il quale s'era dato a divedere, nelle risposte date agl'Oppositori, soggetto alla bile, la quale al suo dire non è altro, ch' una debolezza, giammai era capace di muovere ad ira gl'imperturbabili Signori Accademici di Lipsia. Di poi mi taccia di poco inteso di tutti quei nuovi Metodi, che ne'miei Dialoghi io non hò censurati, se non che alla sfuggita; e di nuovo intraprende la vendetta delle ingiurie, che male a proposito, e senza alcuna ragione egli dice aver io scritte contro i miei Oppositori. Tutto questo si legge nel terzo, e quarto paragrafo.

Per terzo il Relatore s'ingegna di difendersi dalla taccia d'incivile, ed indiscreto, che hà meritata, a cagione di quei inurbani termini, co i quali riferì il mio Metodo, cioè: *Et hic quidam si quorumdam talis est novitas, ut tam parum valeat ad vetera evertenda, ut tuto operoso illorum examine supersedere quis possit &c.* e la fievole ragione, che apporta per iscusare la sua inurbanità, è la seguente.

Egli dice, che avendo io nel mio Metodo errato a dirittura contro gl' assiomi più chiari, e manifesti, non poteva in altro modo riferirlo, se non dicendo, che ogn' uno può astenersi dall' esaminarlo, la qual cosa è lo stesso, al suo dire, che quello hà detto il Sig. Leinibentz in quella sua lettera cioè; *Miror quod de his quæstio instituta fuerit*. Ma perche il misero ben conosce la debolezza de'suoi argomenti, s'affatica, cavillando sù le mie proposizioni, di dare a divedere, ch' io abbia errato contro gl' assiomi più noti, e l' opposizione che mi fà è la seguente.

Dic'

Dice egli, ch'io afferisco, che i numeri 1, 2, 3, e 4, i quali sono equidifferenti, ogn'uno diviso da quantità ineguali, producono cozienti equidifferenti; la qual cosa è contro l'assioma, da esso riferito cioè, che, acciò che li cozienti divengano uguali, le quantità devono esser divise da un madesimo termine. Posta questa ipotesi da esso sognata cioè, ch'io abbia preteso dividere quantitadi, che sono in proporzione aritmetica, con quantità disuguali; si affatica di provare col seguente calculo, che le radici cubiche della serie 1, 2, 3, e 4, sono quantità equidifferenti divise per quantità disuguali; e da ciò conclude, che'l dire, come hò detto io, che i cubi sono in proporzione aritmetica, e che possono terminare al Rettilineo, è contrario all'assioma, ed è contrario ad Apollonio, del quale io non mostro il paralogismo, ma solamente pruovo le mie proposizioni con dimostrazioni false; e qui mi taccia d'aver peccato contro la regola, ch'io medesimo prescrivo cioè, che chi impugna un'altro, deve dimostrare l'errore di quello: Questo si legge nel paragrafo V.

Per quarto si difende dalla contradizione, della quale io l'accuso ne'miei Dialoghi, e dice, che l'aver'egli disapprovato il mio Metodo con quei termini di poca stima cioè; *ut tuto operoso illorum examine supersedere quis possit &c.* non contradice alle lodi, che mi avea date quell'Accademia, a cagione delle altre Opere da me pubblicate; e ciò perche ogn'huomo può ragionare bene in una materia, e con tutto ciò prendere abbaglio in Geometria: Oltr'a ciò dice, che quelle parole da esso dette nella relazione cioè: *Ab amico accepimus &c.* in virtù delle quali io lo condanno d'esser caduto in contradizione, non spiegano quello, che io hò inteso: imperciocche dice egli, che i signori Accademici potevano non aver avuto cognizione del problema della mia Duplicazione del Cubo, quando han fatto l'estratto della mia Vita Civile. Mi accusa poi di poco inteso in grammatica a cagione, dice egli, di non aver io inteso il senso per altro, al suo dire,

re, chiariſſimo di quelle ſue parole: *Intrà; vel extrà cadent*. Tutto queſto ſi legge nel VI., e VII. paragrafo.

Per quinto, egli mi accuſa d'aver io malamente inteſe quelle parole della ſua relazione cioè: *Cui addi poterat &c.*, e dice, ch' egli altro non hà inteſo dire per le accennate parole, ſe non che i miei Oppoſitori potevano aggiungere, che i cubi ſi potevano eccedere l'un l'altro con differenze ſempre l' una minore dell'altra.

Viene poi alla ſua grande ſcuſa, nella quale ſi fà forte colla comune opinione de' moderni, e dichiara, che con quelle parole: *Alij judicaverint*, egli non hà mai inteſo di rimettere all' altrui giudicio la quiſtione cioè, ſe i miei Oppoſitori abbino ſeguito, o no la mia Ipoteſi, ma che ſolamente hà detto, che gli altri giudicheranno ſe la diverſità della generazione, o ſia coſtruzione della medeſima linea, poſſa produrre diverſità di proprietà, o ſia di luogo, che vale a dire, ſe la parabola deſcritta al modo di Galileo poſſa farci ſcoprire proprietà diverſe da quelle, che ci moſtra la parabola Apollonina deſcritta in piano nel modo, che la deſcrivono i moderni geometri. E quì è dov' egli fà vedere la grande idea, che hà delle proprietà delle curve, perche le reputa come linee, le quali hanno proprietà così coſtanti, e ſicure, come il cerchio, ed il triangolo, mentre al cerchio, ed al triangolo le paragona.

Coll'eſempio poi di quel, ch'io hò fatto pretende fortificare il ſuo argomento dicendo, che nel mio Metodo ſtampato l'anno 1715., io hò conſiderata la parabola piana come una curva; ma poi ſi và divagando in alcuni freddi, e poco decenti motti, ne'quali mi tratta da huomo, che giudica più da' fatti, che dalle ragioni; da huomo, che ragiona di quel, che non intende, ed altre ſimili fanciullagini indegne della voſtra conſiderazione: per la qual coſa mi contenterò ſolamente di moſtrarvi in breve, che queſto infelice Relatore tanto più s'inviſchia, quanto più tenta ſvilupparſi dagl' errori; ne'quali inciampò, quando fece del mio Metodo quella ſua ingiuſta, e maligna relazione.

Il

Il Relatore dice nella sua dissertazione: *Ad Dialogos Pauli Matthiæ Doriæ*, aversi prefisso per fine di far sì, che il valore delle mie dimostrazioni dalla sola lettura delle obbiezioni de' miei Contrarij si conoscesse. *Deinde ut valor demonstrationum ejus, non tam per excerpentem, quam per Advesarios Italos innotesceret: & idcircò mentio facta est demonstrationis propositionis quintæ Autoris, & objectionum Ariani, & Galiziæ*. In questo modo di ragionare sembra a prima vista, ch' egli abbia approvate le obbiezioni de' Signori Ariani, e Galizia: ma vediamo ora dal modo, col qual' egli hà riferita la mia V. proposizione, e le obbiezioni de' sudetti Signori, se ciò sia vero.

Le obbiezioni de' Signori Ariani, e Galizia, che si leggono a carte 71 sino a 74 delMetodo, del qual' egli hà fatto relazione, sono due: nella prima delle quali intendono provare, che i cubi possono terminare in altre linee rette, diverse da quella tirata per i punti estremi di 1, e 8, ch' io assegno per luogo de' cubi: e nella seconda formano due triangoli simili, ne i quali si contiene la seguente analogia; come 3 ad 1; così 7 a $\sqrt{8}-1$. Io hò risposto alla prima provando, che non sieguono la mia Ipotesi; ed alla seconda dimostrando, ch' errano contro la proposizione XVI. del VI. libro di Euclide. Viene poi il Sig. D. Antonio Monforte non anonimo, non mascherato, e nella sua lettera da me pubblicata, che si legge a cart. 97. di quel Metodo, approva con parole espresse, e non ambigue tutte le mie proposizioni; impugna le opposizioni de' signori Ariani, e Galizia, dimostrando, che non solo non sieguono la mia ipotesi, ma che errano ancora contro la X. del X. d' Euclide, facendo una analogia di quattro quantità, delle quali le tre prime sono razionali, e la quarta irrazionale. Ma poi il Sig. Monforte fà di più; dimostra per la via del calculo analitico, che i cubi delle applicate all' asse terminano all' ipotenusa di un triangolo rettangolo, e con ciò conferma, per la via del calculo analitico, quello stesso, ch' io aveva dimostrato nella XII. proposizione di quel Metodo, del quale

le il Relatore anonimo avea fatta l' accennata relazione.

Ora il Relatore in quella sua relazione, dopo riferite le obbiezioni degl' accennati Signori Ariani, e Galizia, dice le seguenti parole. *Cui addi poterat, differentias productarum ordinatarum extra, vel intra BL, & LE cubos terminantium posse decrescere, neque illa incommoda sequi, nisi supponatur differentiarum æqualitas; quod idem est, ac supponere id, quod probari oportebat: Secunda objectio eorumdem ad incommodum ducit:* poscia passa a riferire la terza obbiezione. *Idem agit tertia Anonomi ec.* Ora vi par egli, che gli antecedenti termini dal Relatore usati, siano proprij per approvare obbiezioni espressamente, e chiaramente impugnate non dico da me, ma dal Sig. Monforte? A me sembra, che se veramente il buon Relatore voleva, che dalle obbiezioni de' Signori Ariani, e Galizia comparissero i miei da lui pretesi errori, dovea almeno alquanto giustificarli dalla taccia, ch' il Sig. Monforte li ha data, di non aver seguito la mia ipotesi, e di aver errato contro gli elementi d'Euclide. Ma il piu bello si è, che li sudetti Sig. Ariani, e Galizia nelle lor obbiezioni essi ancora si danno a dividere contrarij al sentimento di tutti li moderni matematici, ed a quello del Relatore medesimo: imperciocchè in quelle opposizioni non fanno menzione di parabola cubica del secondo genere, ma espressamente dicono, che i cubi possono terminare ad altre linee rette diverse dalla mia. Dunque se il Relatore pretende approvare le di loro obbiezioni contenute nel mio Metodo dell'anno 1715; la mia quistione col Relatore non è più, da linea retta a curva, ma da linea retta a linea retta; e se è così, per qual cagione nel paragrafo 8, che comincia, *post narratam illam objectionem*, dichiara, che i cubi terminano alla curva? Non hà dunque egli preteso, che le obbiezioni de' Signori Ariani, e Galizia, facessero comparire falsa la mia Ipotesi, mentre suppone, che i cubi vadino alla curva. Ma se è così, sono maliziose quelle parole: *Et idcircò mentio facta est objectionum Ariani, & Galiziæ.* Leggerete mio riverito Signore nel libro, che fra breve, a Dio pia-

piacendo, v' invierò, intitolato Opere Matematiche di Paolo Mattia d' Oria, le obbiezioni de' Signori Ariani, e Galizia, le quali si leggono da carte 85. fino a carte 90., ed ammirarete la maliziosa arte del Relatore.

Passa poi il Relatore a riferire le obbiezioni del Signor D. Bartolomeo Intieri, il quale, come si vede a carte 93., nella sua obbiezione altra cosa non fa, se non che descrivere la parabola cubica del secondo genere; e nella descrizione di quella non si avvale della parabola descritta col modo insegnato da Galileo, siccome io nella mia ipotesi ordino, che si descriva. Ed il Relatore, per riferire la somma delle obbiezioni, usa le seguenti parole: *Bartolomeus Intieri calculo generali ostendit locum cuborum non rectam esse, sed parabulam cubicam, quibus omnibus idem ferè obtigit responsi; Nam præter distinctionem inter id, quod rectis convenit, qua talibus, & qua cubis, & novas satisque longas demonstrationes loci cuborum rectilinei ad I., e III. objectiones allatas, sola excusatio restat. Opponentes considerare parabulam in alia geneseos hypotesi, quam qua utitur Auctor. Qui ipso affirmat, prò generationum diversitate contrarias Parabulæ esse posse proprietates, seù potiùs, quod juxtà unam generationem certissimum est, id in incommoda ducere, si juxtà aliam exigatur; quod quantum conveniat cum uniformi non extensorum tantum, sed & rei cujusvis naturæ, alij judicaverint*. Indi passa a far relazione della lettera da me diretta al dottissimo, e gentilissimo Sig. Marchese Salcito, e dice; *Quibus de cætero volupè &c.* Ora dunque è certissimo, che con le antecedenti parole, che cominciano; *Bartolomeus Intieri &c.* e finiscono *alij judicaverint* sembra, che il Relatore approvi l' opposizione del Signor D. Bartolomeo Intieri, a cagion che il relatore suppone, che 'l descrivere la parabola col modo insegnato da Galileo, ovver col modo praticato dalli signori moderni geometri, non possa produrre diversità di proprietà. Vero è bensì, che di questa sua sentenza se ne rimette al giudizio degl' altri, perchè dice: *Quod quantum conveniat cum uniformi non*

ex-

extensorum tantum, sed & rei cujusvis naturæ; alij judicaverint.

Di grazia mio riverito amico, e signore, se non intendiamo bene la latinità del nostro Relatore per essere alquanto oscura, preghiamo un pedante, che ce la spieghi, e ci dica, se il Relatore hà inteso di approvare le obbiezioni de' Signori Ariani, e Galizia, nelle quali non parlano di curve di grado superiore; e se approvando quella del Sig. Intieri dimostrata *calculo generali*, com' egli dice, si sia poi rimesso al giudicio degl' altri in ciò che riguarda al dire, se la parabola descritta al modo di Galileo, ovvero al modo degl'altri geometri, possa farci scoprire ne' cubi diverse proprietà in quanto al luogo, dove vanno a terminare. Ma considerate di grazia, quanto l'infelice Relatore in quella sua relazione sia andato errato, quando, regolandosi colla comune opinione de' moderni, i quali vogliono, che i cubi terminino alla parabola cubica del secondo genere, crede insieme con gl' altri, che i cubi non possano terminare alla retta; e poscia niuna cura prende di trovare errore nel calculo analitico, col quale, siccome vi hò detto, il Sig. Monforte hà dimostrato, che i cubi terminano all' ipotenusa di un triangolo rettangolo. Certamente un difensore dell'Analitica, com'egli e, vedendo, che il calculo analitico milita contro esso, non dovea lasciar di rispondere ad un huomo della fatta del Sig. Monforte. Adunque, o il Relatore approvava le obbiezioni de' Sign. Ariani, e Galizia, ed era contrario al Sig. Intieri, il quale vuole i cubi alla curva; o approvava l' obbiezione del Sign. Intieri, ed era contrario alli Signori Ariani, e Galizia, li quali vogliono, che possano terminare in diverse rette; adunque sempre era tenuto a dichiarare, quale delle obbiezioni approvava. Il certo però si è, ch' egli credeva colla comune di tutti i matematici moderni, che i cubi terminassero alla curva, e perciò voglio accennarvi il grand'errore, ch'egli prende, quando dice, che reca incomodo considerare la parabola descritta in diverso modo, a cagione, che la diversa descrizione di quella non è valevole a farci

sco-

scoprire proprietà diverse. Vi narrerò ora la mia ipotesi, e di grazia consideratela.

La proposizione, ch'io hò proposta alli Sig. geometri nel Metodo da me pubblicato l'anno 1715., è la seguente cioè: *Se si descrive la parabola piana nel modo insegnato da Galileo, nella quale vi sono espresse in linea, e in numero le radici 1, 2, 3, &c. Si potranno per costruzione fare i cubi 1, 8, e 27; e con ciò provare, che i cubi intercetti fra 1, e 8, frà 8, e 27, terminino a diverse linee rette, che sono pezzi di diverse ipotenuse.* Ora questi cubi 1, 8, e 27, li quali servono di limiti, non si possono certamente avere, quando la parabola piana si descrive nel modo ordinario de'Sig. geometri, perche in quella non si hanno le applicate espresse coi numeri 1, 2, e 3, le quali son quelle appunto, che prolungate mi danno i cubi 1, 8, e 27; adunque la mia ipotesi è diversa da quella degl' altri.

Ora vi par egli, mio riverito Signore, che la differenza, che vi è nella descrizione dell'una, e nella descrizione dell'altra, varij così poco l' ipotesi, che'l Relatore non dovesse esaminare, se la diversità dell' ipotesi possa produrre diverse proprietà, ma che all' incontro dovesse dire: *Multum incommodi refert in alia genefeos considerare?* Egli al certo non puole in altro modo scusarsi dal non aver esaminata la mia ipotesi, se non coprendosi coll' universale sentimento di tutti li matematici, i quali hanno precipitosamente approvate le curve per linee geometriche: ma questo non è altro, se non pretendere, che Renato, il quale si è molto dilungato dalla sentenza degli antichi, sia stato infallibile, e che perciò la moltitudine, ch'ave aderito a Renato non possa avere errato. E in vero, è forse egli impossibile, che li signori geometri moderni, li quali appigliandosi alla sentenza di Renato si sono ribellati da quella di tutti gl' antichi geometri, abbino errato? certo che nò; e se non è impossibile, perche non esaminare la mia ipotesi, colla quale intendo d' avvertirli de' loro errori? Ma acciò possiate divenire in tutto chia-

ro di questa verità, leggete la Differtazione da me già pubblicata intorno alla nuova geometria di Cartesio, siccome vi hò detto, e colà vedrete quanto incautamente tutti li Signori moderni geometri, volgendo le spalle all' autorità degl' antichi, allettati dall' amore del facile, si siano lasciati abbagliare dalle apparenti ragioni di Renato. E' chiaro dunque e manifesto, che'l misero Relatore, o non hà mai creduto, come dice, che dalle obbiezioni de' miei Contrarij potesse comparire il valore delle mie dimostrazioni; o che se hà preteso, che potesse comparire dall' obbiezione del Sig. Intieri, era troppo tenacemente attaccato al comune errore.

Io poi non voglio, mio riverito Signore, ed amico, punto dilungarmi in ciò, ch' egli dice contro di me nel III. e IV. paragrafo, e nel principio del V., sendo tutte fanciullagini, le quali niente han che fare colla dottrina, ch' io tratto: Ma dirò solamente, che la sua malizia comparisce a bastanza dal solo vedersi, ch' egli và celando gl' errori de' Signori Ariani, e Galizia, i quali sono così manifesti, che li medesimi Signori Autori degl'Atti, i quali dal Relatore si sono separati, gl' hanno ancora conosciuti; e che ciò sia vero, si vede, che mi fanno in questo Tomo VII. de' supplementi nuove obbiezioni, le quali certamente non aurebbero fatte, e si sarebbero contentati di approvare le opposizioni de' miei Contrarij, se le avessero conosciute sufficienti a diroccare le mie dimostrazioni.

Ma che bisognerebbe certamente essere del naturale discorso mancante per non conoscere, anche senza la cognizione della Geometria, che i Sig. Ariani, e Galizia abbino errato contro gli elementi d'Euclide; che sia così. Il Sig. Monforte huomo celebre nell'Europa, ed amante della gloria di tanto, che non per altro fine, se non per acquistar quella, hà pubblicate le opere, che di lui si leggono; non aurebbe certamente intrapreso, per favorirmi, di asserire, che li Signori Ariani, e Galizia hanno errato contro la X. del X. d' Euclide, se non fusse stato più

che

che vero; altrimente ciò asserendo, aurebbe errato egli contro gl' elementi d' Euclide, e con ciò meritata quellà taccia di male inteso degl' elementi, che dava agl' altri. Tralascio poi di dire, che 'l Signor Monforte non solo ave approvato il mio Metodo con termini così chiari, come si vede nella sua lettera a carte 97. del mio nuovo Metodo; ma che nel ultimo di sua vita, ch'è quel punto, dove finiscono i rispetti, e le speranze, egli mi dedica la sua dottissima Astronomia, e nella lettera dedicatoria, che a me indirizza, di nuovo conferma colle seguenti parole, ch' egli approva il mio Metodo: *Eò autem libentius tuis suasionibus assensi, quod tractatum hunc tibi placiturum credidi; quia eodem ferè collineat cum doctissimo, utilissimoque Opere tripartito, quod nuper edidisti de Vita Civili, quo ex vera philosophia rectum regimen rerum publicarum elici doces, undè Cives fortunam tutam tranquillamque traherent, & tantam mathematicarum scientiarum peritiam ostendisti in Mecanicis, & nova Mesolabi Methodo, ut tibi merito hac scribamus, quæ solis Mathematicis scribenda, inquit Copernicus.* Tutto questo fà conoscere anche a i non intesi di Geometria, che il mio Metodo è in tutto vero.

Oltr'a ciò li medesimi Signori Ariani, e Galizia han dato a divedere, che non eran contenti delle prime abbiezioni da essi fatte, perche poco appresso fecero separatamente altre obbiezioni, nelle quali mostrorono di dividersi di sentimento; perche il Sig. Galizia pubblicò una lettera intitolata. *Dimostrazione del luogo, dove terminano le linee cubiche &c.* ed il Sig. Ariani un altra scrittura intitolata. *Osservazioni sù d' una lettera del Sig. Antonio Monforte &c.* e in queste due scritture non sieguono il sentimento delle prime, ne sono uniformi nelle obbiezioni; ed il Relatore, il quale non avea ancora vedute le accennate lettere, quando fece la relazione del mio Metodo dell'anno 1715., asserisce avere avuto intenzione, che dalle di loro obbiezioni comparisse il valore delle mie dimostrazioni; *& idcirco mentio facta est obiectionum*

Ariani, & Galizia. Alcerto che se egli non scrivesse come anonimo bisognerebbe dire, che gli uficij hanno avuto tanta forza sopra il di lui animo, che l'han fatto dimenticare del zelo, che gl' huomini onesti devono avere del proprio onore. E in vero se li Signori Ariani, e Galizia si vantassero delle approvazioni di questo anonimo, non sò qual credenza potrebbero ritrovare appresso gli huomini ragionevoli, perche sempre potrebbe dirsi, che l' Accademia le disaprova, gia che non se ne avvale, nel mentre, che un anonimo fà sembianza d' approvarle.

Alla taccia poi, che mi dà di non aver io inteso i Metodi de' signori moderni, potrei rispondere, che mi glorio d' ignorare le cose inutili, e perniciose: ma dico, che a me basta d'intendere così bene lo spirito d' Euclide, e degl' antichi geometri, che hò fatto sopra del primo, un comento ne' miei Dialoghi, il quale li Signori Autori degl' atti medesimi hanno in qualche modo lodato nella relazione, che di quelli han fatto ne' lor atti dell' anno 1717., e la quale di nuovo han creduto bene di far ristampare in questo Tom.VII.de' supplementi,forse acciò serva di perpetuo testimonio del lor sentimento contrario,come credo, a quello del loro Relatore: Oltre a ciò posso dire a buona ragione, aver ritrovato colla mia sola corta intelligenza delle cose matematiche quello, che li signori moderni non han possuto ritrovare co i lor ampj metodi, e coi quali non mai potevano ritrovare; imperciocchè per la via de' calculi analitici, o d' integrali, o differenziali, o d'altri, non mai poteano ritrovare le linee rette, che formano il perimetro delle parabole piane, e delle cubiche, ch' è quello, ch'han desiderato di ritrovare tutti gl' antichi, ma vi è d' vuopo delle linee, e de' numeri, cioè dell' uso della proporzione continua, e della discreta per ritrovarle. Io poi posso dire, che ne' miei Dialoghi accennai brievemente i diffetti, che conosceva essere ne' nuovi Metodi,ma non feci sopra di quelli un espresso trattato, perche mio intento era di difendere il mio Metodo, lasciando agl'altri la libertà di seguir quelli, che più loro piacesse di seguire. A

A quello poi cioè, ch'egli pretende di non avermi offeso con quelle ingiuriose parole: *Et hic quidem, si quorumdam talis est novitas, quæ tam parum valeant ad vetera evertenda, ut quis tuto ab illorum examine superſedere possit &c.* Basta ſaperſi i termini di civiltà ſoliti uſarſi frà gl' huomini oneſti, per conoſcere, che quando anche il mio Metodo non fuſſe vero, come lo è, non ſi doveano uſare quei termini con un huomo, e mi ſia pur lecito dirlo, quale io ſono, il quale per le mie Opere avea nella letteraria repubblica gia conſeguito una qualche fama. Oltre a ciò reca maraviglia il vedere, come il livore, che aveva verſo di me l'infelice Relatore, l'offuſcaſſe cotanto l'intelletto, che non conoſceſſe, che gl'huomini indifferenti, e conoſcitori della perfetta armonia, e conformità de'penſieri, colla quale Iddio hà creata la mente umana, non aurebbero potuto di leggieri credere, ch' io aveſſi ſcritta una manifeſta ſciocchezza, dopò che aveva dato ſaggio nelle altre mie Opere, di avere, la Dio mercè, un poco di buona, e retta mente: per la qual coſa, in conſequenza di quella maſſima da tutti approvata cioè: *In magnis voluiſſe ſat eſt,* gli huomini di ſenno aurebbero almeno creduto aver io ſcritta una coſa ingegnoſa, e ſi ſarebbero ſcandalizzati di quelle parole: *Quæ tam parum valeant advetera evertenda, &c.* Così dunque voi ben vedete, che con queſta ſua difeſa l'infelice Relatore batte le ali nel viſchio, e ſempre più s'inviſchia.

Rimarrebbe a ragionarſi del modo poco oneſto, col qual' egli dice nel paragrafo III., che li Sig. Autori degl' atti non mai potevano concepire nel loro animo ira contro di me a cagione, che aveano conoſciuto nelle veementi riſpoſte, che, al ſuo dire, avea date a miei Contrarij, ch'io era ſoggetto alla bile, la quale, egli dice, che ſempre è debolezza: Ma a queſto non mi affatico ora di riſpondere a cagione, che mi preme di farvi prima vedere il ſuo errore in quel ch' aſſeriſce nel paragrafo V cioè, ch'io abbia errato contro i notiſſimi aſſiomi, e che perciò egli non poteva riferire il mio Metodo con altri termi-

ermini, se non con quelli incivili, colli quali lo hà riferito, e poscia difendermi sù questo capitulo della bile, e della male intesa debolezza, colla quale taccia il mio costume. Ascoltate di grazia, mio gentilissimo Signore, le maliziose ragioni, ch'egli adduce per mostrare, ch'io abbia errato nell'assiomi, ed osservate la mia risposta.

Il Relatore per provare, ch'io abbia errato negl'assiomi, nel paragrafo V. dice così: *Nam Axioma est, ex æqualium divisione æqualia prodire, divisionem per æqualia fieri debere: Jam differentiæ terminorum in Arithmetica progressione sunt æquales, & hæ ad terminum quemvis constituendum aggregantur tantum ad primum, qui proindè occurrit in singulis. Ergo ut differentiæ quotientum iterum æquales prodeant, & terminus primus, & quævis differentiæ ad illum aggregatæ, id est termini quivis reliqui, per eandem quantitatem dividi debent; Sunt autem radices cubicæ seriei 1, 2, 3, 4, &c. quantitates æquedifferentes per inæquales quantitates divisa nempè* $1 : \sqrt[3]{1}$, $2 : \sqrt[3]{4}$, $3 : \sqrt[3]{9}$, $4 : 2\sqrt[3]{2}$. *Ergò has quantitates in progressione arithmetica esse, seù ordinatis ad locum rectilineum terminatis exponi posse; Axiomati contrarium est: Propositionibus verò demonstratis ab Apollonio Auctore contradicit, non ostendendo vitium in ipsius demonstrationibus, seù suas tantum, & omnes indirectas proponendo.*

Or qui è, dove il Relatore erra all'ingrosso, perche non intende punto la mia ipotesi. Non intende la mia ipotesi, perche per la mia ipotesi le quantità 1, 2, 3, e 4, le quali vengono divise da quantità diffuguali, non hanno che fare colla mia ipotesi; che sia così. Io dimostro per la mia ipotesi, che le parallele intercette fra 1, e 2, sono radici cubiche de' cubi intercetti fra 1, e 8; e che le parallele intercette fra 2, e 3, sono radici cubiche de' cubi intercetti fra 8, e 27; e così sempre seguendo, faccio il paragone fra le radici successive, ed i cubi successivi. Ma le radici intercette fra 1, e 2, e le intercette fra 2, e 3; ed i cubi intercetti fra 1, e 8, e gl'intercetti fra 8, e

27,

27, terminano a diversi pezzi d' ipotenuse, dalla qual cosa ne avviene, che tutte siano in diverse serie di proporzione aritmetica. Ora ciò posto, in consequenza della mia ipotesi non si possono prendere i divisori fra le radici 1, 2, 3, e 4, ma bisogna prendere un divisore comune alle parallele intercette fra 1, e 2, un altro comune alle parallele intercette fra 2, e 3, e così sempre, ciò che non può farsi, perche le radici intercette fra 1, e 2, fra 2, e 3, &c. sono irrazionali. Adunque il Relatore non intende la mia ipotesi, quando mi accusa di aver io errato negl' assiomi.

Ne meno può tacciarmi dell' errore, del qual mi taccia cioè, ch'io faccia terminare ad un medesimo Rettilineo i cubi delle radici 1, 2, 3, e 4; perche se egli avesse letta, e bene intesa la mia X. proposizione di quel metodo da esso riferito, avrebbe veduto, ch' io faccio terminare i cubi ad una curva, la quale si compone di pezzi d' ipotenuse tirate per i punti estremi de' cubi 1, e 8; 8, e 27 &c. Non intende dunque il Relatore il Metodo degl' indivisibili, nè la mia ipotesi; perche quella, ch' io propongo è una proposizione nuova bensì, però non ripugna ad alcuna delle proposizioni dimostrate. E qui mi cade in acconcio di rispondere ancora alla obbiezione, che mi fanno li da me riveriti Signori degl' atti nel paragrafo, che comincia: *An non videt Auctor &c. pag.* 203. della relazione, che fanno della Lettera da me diretta al Sig. Giacinto di Cristofaro.

In quel paragrafo dicono, che dalla mia proposizione altra cosa non ne risulta, se non che li quadrati delle radici alla parabola Apolloniana siano in proporzione aritmetica; e che il dire, come, a lor dire, dico io, che le radici delli quadrati sono in proporzione aritmetica, ripugna alla proposizione XXII. del VI. d'Euclide.

All'antecedente obbiezione io rispondo, che la mia proposizione niente ripugna alla XXII. del VI.; perche io parlo delle infinite radici intercette frà 1, e 2, frà 2, e 3, &c., non delle radici in particolare; ond' è, che questa

pro-

proposizione è in tutto diversa da quella d'Euclide, nella quale egli parla delli quadrati, e delle radici, che sono in proporzione geometrica, non degl' infiniti quadrati intercetti fra 1, e 4, e delle radici intercette frà 1, 2, frà 2, e 3, &c. le quali possono essere in proporzione aritmetica a cagione, che si prova, che le differenze frà le radici, e frà i quadrati nell' infinito svaniscono in tutto, e le radici rimangono in proporzione aritmetica. Ma acciò vedano chiaramente, che la mia proposizione niente ripugna alla XXII. del VI. d' Euclide; osservino, che sopra l' asse, supposto diviso in parti infinite, si possono prendere quattro quantità, o quante altre si vogliano, le quali siano frà esse in proporzione geometrica; ed in questo caso le loro radici si ritroveranno nelle mie intercette frà 1, e 2, frà 2, e 3, &c. e saranno in proporzione geometrica frà esse, e termineranno in una delle mie linee rette, e con tutto ciò le infinite radici saranno frà esse in proporzione aritmetica; è dunque manifesto, che la mia proposizione non ripugna a quella d' Euclide. Ma ritorniamo al nostro buon Relatore, il quale a quello, ch' io hò detto ad esso rispondendo, per difendere la sua ingiusta relazione dirà, che nella proposizione X. del mio Metodo stampato l'anno 1715., io hò detto, che i cubi terminano ad un medesimo Rettilineo, mentre hò detto, che i cubi intercetti frà BB1, ed VZ27, sono in proporzione aritmetica, e citerà le parole, che si leggono nella conclusione della dimostrazione della mia proposizione X., le quali son le seguenti: *Abbiamo dimostrato, che sono in proporzione aritmetica le parallele, le quali sono da BB, sino a CF, e sono ancora in proporzione aritmetica, quelle, che sono da CF, sino ad VZ, dunque tutte le parallele, le quali sono da BB sino ad VZ, sono in proporzione aritmetica, ch'è ciò si doveva dimostrare.*

Ma a questo io rispondo, che da quelle parole cioè, *Dunque le parallele, le quali sono da BB sino ad VZ, sono in proporzione aritmetica*, non si può dedurre, ch' io abbia inteso dire, che sono nella stessa proporzione aritmetica

le pa-

le parallele intercette frà BB, ed VZ; perchè mentre di sopra le divido, dicendo: *Ma abbiamo dimostrato, che sono in proporzione aritmetica le parallele, le quali sono da BB fino a CF, e sono ancora in proporzione aritmetica quelle, che sono da CF fino ad VZ*: è segno manifesto, che non intendo dire, che sono nella medesima serie di proporzione aritmetica, ma che generalmente sono in proporzione aritmetica tutte le parallele, che terminano alle mie linee rette, le quali sono porzioni d'ipotenuse di diversi triangoli.

Ma fingiamo pure, ch' io avessi errato ne' termini di ragionare; e fingiamo ancora, che la mia X. proposizione non fusse stata chiaramente dimostrata a cagione de' termini ambigui da me accennati: era egli di sì corto intendimento il mio Relatore, che non potesse intendere, che quantunque le intercette frà BB1, ed VZ27, non siano nella stessa serie di proporzione aritmetica, con tutto ciò le intercette frà BB1, e CF8, e le intercette frà CF8, ed VZ27, sono in proporzione aritmetica, ogn' una secondo la serie di diversi triangoli, ne' quali sono; e con ciò spiegar egli più chiaramente la mia proposizione, o almeno almeno chiedermi del modo, come io la intendeva? Vi sembra egli giusto, mio riverito Signore, che per una ambiguità de' termini, insultasse il mio Metodo con quelle ingiuriose parole; *Et hic quidem &c.*?

Ma quì non mancherà un altra scusa al Relatore; perchè dirà certamente, ch'io nel Metodo, del quale egli hà fatto la relazione, mi avvaglio della parabola Apolloniana, nella quale le radici non posson essere in proporzione aritmetica, e che perciò aveva egli ragione di dire, ch'io pecco contro l'accennato assioma. A questo io rispondo esser verissimo, che nel principio temei di alzarmi contro la comune opinione, ma che nell' XI. proposizione di quel libro asserisco già, che'l perimetro della parabola si compone di linee rette, le quali sono porzioni d'ipotenuse, i punti estremi delle quali sono determinati: Ond' è, che se il Relatore l'avesse considerata, aurebbe

potuto vedere almeno, che se quella proposizione era vera, le radici intercette frà 1, e 2, frà 2, e 3, &c. erano in proporzione aritmetica, e per ciò, o dovea supplir esso la dimostrazione, ovvero richiedermi del modo, come io intendeva di dimostrare, che le radici infinite de' cubi intercetti frà 1, e 8, terminassero ad una porzione d'ipotenusa, e che perciò fussero in proporzione aritmetica; e non asserire a dirittura, che 'l mio Metodo era certamente falso, appoggiandosi solamente, com'egli dice, alla considerazione, ch' io divideva quantità, che sono in proporzione aritmetica con quantità disuguali frà loro; perchè l'haverei risposto, siccome hò detto poc' anzi, ch' io considero le radici intercette fra 1, e 2; fra 2, e 3, fra 3, e 4, e non le radici intercette fra 1, e 4, come poste in un medesimo Rettilineo.

Ma oltr' a ciò il Sig. Monforte nella sua lettera ancora dimostra, per lo calculo analitico, siccome hò detto poc'anzi, che i cubi delle radici 1, 2, 3, &c. terminano all' ipotenusa di un triangolo rettangolo, dalla qual cosa ne avviene, che terminino a i pezzi d' ipotenusa da me assegnati, appunto come hò dimostrato nella proposizione XII. di quel Metodo. Ora se il buon Relatore non era sufficiente ad intendere una dimostrazione fatta per la via sintetica, com'era la mia XII. proposizione; dovea almeno, vedendo, che 'l calculo analitico ancor conduce alla linea retta, porsi in dubbio, ed esaminar seriamente il mio Metodo, o pure rispondere al Sig. Monforte, il quale era huomo, che dovea farli autorità, perch'era stato sommamente venerato dal Sig. Leibenitz, e con termini di molta stima più volte ancora lodato dalli Sig. Autori degl'atti di Lipsia. Ecco dunque mio riverito, e gentilissimo Signore, che'l buon Relatore si è dato a divedere invidioso contro di me, riferendo con termini di disprezzo un Metodo, del quale non ne poteva ignorare in tutto i pregi.

Per rispondere poi a quello, ch'egli dice cioè, *Propositionibus verò demonstratis ab Apollonio Autor contradicit,*

non

non ostendendo vitium in ipsius demonstrationibus, seù suas tantum, & omnes indirectas proponendo. Dico, ch' io in quel tempo, che scrissi il Metodo, non ancora aveva sperimentato, con quanta tenacità d'opinione, li Signori moderni geometri aveano ricevuto nella lor mente il falso postolato, che Renato Des-Cartes, nel principio del secondo libro della sua Geometria, hà voluto, che i geometri ricevessero, come legitimo cioè; *Datum conum Dato plano secare*, e che perciò io credeva, che quando proponeva una costruzione fatta con tutto il rigore de' postolati d' Euclide, non si potesse da' geometri dubbitare, che quella dimostrazione, che da sì fatta costruzione nasceva, dovesse essere in tutto vera; e che perciò non fusse necessario, ch' io dimostrassi in che fusse mancante la dimostrazione d' Apollonio. E in vero io credo, che Apollonio medesimo se fusse frà viventi, si riderebbe di vedere, che li Signori moderni geometri li concedono piu di quello, ch'esso forse hà preteso; che sia così.

Fù riputato degno d' infinita lode Apollonio, solamente a cagione d'aver dimostrato in generale, che le radici dell'ascisse dell' asse terminano ad una curva; ma io credo, ch'egli medesimo non abbia mai preteso, che le sue curve, non geometricamente descritte, potessero dare esattamente i punti, alli quali terminano le radici; e che ciò sia vero, veggiamo, che tutti gl' antichi geometri han detto, che la curva si compone di linee rette, delle quali non si conoscono i termini per descriverle; e se ciò han detto, è certissimo, che non credevano, che le linee curve meccanicamente descritte dassero esattamente i punti, alli quali vanno a terminare le radici. Son venuto io, e non so, se debba dire per mia fortuna, o per mia disgrazia, hò ritrovato le linee rette, delle quali si compone la curva, e con cio hò trovato quello, che gl' antichi han desiderato, che si ritrovasse. Ora qual peccato hò fatto io, ed in che ripugno ad Apollonio? alcerto altra cosa non hò fatto, se non che supplirlo. Adunque

io non era tenuto a dimostrare, in che cosa fusse mancante la dimostrazione d'Apollonio. Ma perche in appresso hò veduto con esperienza, con quanta tenacità di mente li Signori geometri moderni abbiano abbracciato il postolato di Renato, col quale vuole, che le curve d'Apollonio abbiano proprietà vere, e costanti. Nella Dissertazione da me più volte accennata, mi sono avvisato di dimostrare l'abbaglio, che han preso; e nella Raccolta a cart. 42. hò dimostrato in che sia mancante Apollonio, e da cart.43. fino a 47. hò dimostrato l'errore, che prendono li Sign. moderni nella descrizione, che fanno in piano della parabola. Ecco dunque ampiamente convinto il nostro Relatore di tutte le accuse, che mi dà in quel suo breve discorso intitolato *Ad Dialogos &c.*

Or qui è da notarsi, che quel che hò detto intorno alla cagione, per la quale io non manifestai nel mio Metodo, in che era mancante Apollonio, mi vale ancora per difendermi contro li Sig. Autori degl' Atti in quello, di che m'accusano nel loro paragrafo VII. dove dicono; *Si quis ex me quærat, quidnam Autori geometrici, quidnam mechanici nomine veniat, id hactenus deprehendere me non potuisse fatebor: tam enim super hac re variat, ut vix constet, an ideò sectiones coni e Geometricarum numero excludat, quod de ijs nil occurrat in libris Euclidis, quod videtur facere pluribus locis in Dialogis:* perche a questo posso rispondere, che hò sempre inteso insieme con tutti gl' antichi geometri, che per linee geometriche s' intendono quelle, che si descrivono *circino, & regula*, e per meccaniche quelle, che si descrivono con stromenti di moti composti, come si descrivono le curve d' Apollonio; ma dopò che hò veduto, quanto li signori geometri moderni sian fermi nella opinione di Renato, cioè: *Che la costruzione meccanica produce l'istessa esattezza in ciò, che s' attiene a scoprire le proprietà, che produce la costruzione fatta colla semplicità de' postolati d' Euclide;* hò fatta l' accennata Dissertazione, nella quale dimostro, quanto sia falsa questa sentenza, che Renato hà inse-

insegnata alli signori moderni geometri, quale Differtazione possono leggere li da me riveriti Signori Autori degl'atti, a fine di rimanere persuasi della verità delle mie dimostrazioni. Qui potrei terminare la mia risposta; ma perche il Relatore nel suo paragrafo III., che comincia: *Enim verò Dominus Doria &c.* mi taccia di huomo soggetto alla bile, a cagione delle veementi risposte, ch' egli dice, aver io date alli miei Oppositori, la qual bile egli asserisce esser sempre debolezza. Voglio, mio riverito Signore, farvi conoscere, ch' egli è tanto poco inteso della Morale, quanto lo è delle Geometria.

Io non voglio, nè devo quì fare una lunga apologia di tutto quello, che mi è accaduto nell'istoria di questa mia novella Invenzione, mi basta solamente per giustificarmi, il far conoscere, ch' io in questa disputa sono stato sempre il provocato, e non mai il provocante; e quel ch'è più d' ammirazione degno, sono stato provocato da quelli, che come miei antichi amici erano tenuti a nascondere i miei errori, quando pure gli avessi commessi, e non mai dovevano con arti, e mi perdonino pur essi, men che sincere procurare di adombrare la verità, che nella mia Invenzione si contiene.

Voi sapete, mio gentilissimo Signore, che prima di pubblicare quel Metodo, del quale il Relatore, in nome de'Sig. Autori degl'atti, fece quella incivile relazione, della quale ora hà intrapreso la difesa; io pubblicai la prima volta il mio Metodo, e non sì tosto fù quello pubblicato, che s'alzarono tutti li matematici a rumore contro di me, mormorando però frà essi, senza appalesarmi quello, che in contrario avessero alle mie proposizioni: ma qual partito io presi a questo nuovo accidente? alcerto non altro, che quello di fare una nuova giunta al mio libro, nella quale, non solo con termini di civiltà, ma di umiltà pregava tutti li signori matematici miei amici ad avvertirmi degl' errori, ch' essi forse credevano essere nelle mie dimostrazioni. Ma questo qual utile arrecò a me? non altro, che quello di vedergli tutti, a guisa di un popolo

polo ammutinato, andar con detti inconsiderati lacerando la mia novella Invenzione.

A questo sì fatto a me sensibile colpo, pensai di volerli vedere in campo aperto, e di far sì, che esponendosi ancor essi, come me alla censura de' dotti, non potessero impunemente andar spargendo ciance nel vulgo. Procurai dunque con molto stento, e con molti mezzi le loro opposizioni, le ricevei, e le pubblicai nell'accennato Metodo, siccome poc' anzi hovvi detto.

Ma quì risponderà il buon Relatore, ch'egli era da noi per molta distanza lontano, e che perciò come obbligato a giudicare dallo scritto, non poteva per queste cagioni a lui ignote giustificare le veementi risposte da me date a miei Oppositori. Ma io rispondo, e dico, quali sono queste risposte, che non sono dovute alle magistrali maniere, colle quali alcuni di essi scrissero le loro opposizioni? Leggete di grazia le opposizioni de' Sig. Ariani, e Galizia a carte 71. del Metodo, e poi ditemi, se un maestro poteva scrivere con modo più magistrale ad un suo discepolo: ecco le loro parole. *Poiche l' Autore, cotanto mio riverito Signore, per sì efficaci maniere mi obbliga, che io, contro ogni dovere, per iscritto dichiari la difficultà, per suo preciso, ed assoluto comando, da me fatta contro al di lui argomento, per mezzo del quale, nella proposizione prima della giunta del suo nuovo Metodo suppone di dimostrare &c.* Poscia narrano le loro obbiezioni in tutto ripugnanti agl' elementi d' Euclide, come ogn' un sà, e come ogn' uno può argomentare dal vedere, che sono rifiutate dalli Signori Autori degl' atti medesimi, e solamente con termini ambigui approvate da un Anonimo. Indi li Signori Ariani, e Galizia concludono co i seguenti termini magistrali cioè, *e perciò manifestamente falso*.

Ora ditemi un poco? nelle antecedenti parole ossequiose sì verso quel poco d' origine, che hò dalla fortuna sortito, ma altere in ciò che riguarda quel poco di sapienza, che per lo mezzo delle mie assidue fatiche mi son procacciato, non ci vedete dipinte le immagini di due

mae-

maestri, li quali mostrano un certo dispiacere di dare il colpo ad un cavaliere ingannato, che a ciò fare li costringe? Ma che! hò io forse per ciò dato loro ingiuriosa risposta? certo che nò; anzi altra cosa non hò fatto nella mia risposta, che astenermi dal usare quei termini di stima, che per mio natural talento aurei usati verso di essi: E in vero se leggete le risposte, ch' io hò date al Sig. D. Bartolomeo Intieri, ed all'Anonimo, i quali meco con termini di molta stima, han ragionato, vedrete, ch' io uso con quelli tutta la civiltà, che è dovuta al lor merito, e ch' è di me propria.

Ma il bello si è, che 'l Relatore non poteva ignorare, ch' io mi doleva a guisa di huomo ferito; imperciocchè nella lettera, che a carte 59. del Metodo, io indirizzai al Sig. Monforte, mi dolgo con esso di una lega de' matematici, che contro di me si era fatta in Napoli; ed abbenche contro quella io ragioni al Signor Monforte a guisa d' huomo riscaldato nell' animo per l' ingiustizia, che riceveva, non uso però alcun' termine ingiurioso alle persone, delle quali si trattava, ma solamente con grande ardore mi affatico di reprimere le arti men che sincere, le quali meco praticavano. Ora da tutto ciò nè poteva il buon Relatore ben conoscere, ch' io ragionava da huomo, ch' era stato offeso, e perciò come potea egli, senza prima conoscere a quale delle parti assisteva la giustizia, condannarmi d' irato senza ragione?

Ma per giustificare in tutto questa mia ira, a cagione della quale il Relatore mi condanna male a proposito, del difetto di debole: Rammentatevi di grazia quello, che avvenne per l'approvazione, che 'l Sig. Monforte fece del mio Metodo. Voi sapete, che vedendo essi di non poter più, dopo quella approvazione, rappresentare al vulgo con assertive magistrali, il mio Metodo come falso, e come inutile, s'appigliorono al malizioso partito di andar' pubblicando, che 'l Sig. Monforte mi lusingava, senza pensare, che ciò dicendo ogni huomo, che hà fior di senno, dovea ben conoscere, che in Geome-

tria

tria il lusingare non si può fare, senza darsi a divedere ignorante, appunto come hò detto poc'anzi.

Ora vi par egli, che questi modi, colli quali meco han proceduto quelli, da i quali io doveva per ogni ragione sperar difesa, non sia bastante ad accendere in un'animo ben'educato, un poco di quella giusta ira, che i Filosofi han concesso agl'animi nobili, e che 'l Sacrosanto Evangelo ancora permette di usare contro quelli, che nelle loro operazioni si danno a divedere men che sinceri? io per me credo, che se mai si puol dire quell'adaggio cioè, *giusta ira lo muove*, di me possa dirsi: non niego però, che aurei desiderato di poter usare più tosto quella divina virtù d'amare i miei persecutori, che quella giusta, e lodevole ira, che si reputa frà le virtù umane; ma dico altresì, che quando la divina grazia non mi concede l'accennata virtù della mansuetudine, la giusta, e nobile ira, o è lodevole, o è almeno compatibile: se il buon Relatore però crede, che l'ira giusta, o ingiusta, ch'ella sia, si debba sempre nomar debolezza, io sarò debole insieme con S. Geronimo, e con molti Santi Padri, senza offender il Santo Evangelo, che ci permette di adirarci in quelle parole: *Irascimini, & nolite peccare*.

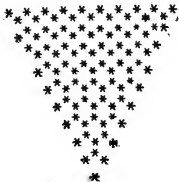
Ma in vero il buon Relatore non sa, come si vede dal suo operare, quanto grave colpa sia agl' huomini di lettere, il declinare dalla sincerità; che se ben lo sapesse, conoscerebbe, che gl' huomini, li quali espressamente professano d'indagar la verità, non possono più grave delitto commettere, che quello di non confessarla, particolarmente nelle materie riguardanti la Geometria, nella quale non hanno scusa per difendersi. Io per me penso, la Dio mercè, di non esser reo di così grave delitto, com'è quello della mancanza di sincerità: perchè o vere, o false, che vogliano i Signori Matematici asserire, che siano le mie proposizioni, non vi è chì possa dire a buona ragione, che alcuno mi abbia fatta opposizione, alla quale io dovessi giustamente arrendermi; per la qual cosa ingiusta, e temeraria è la taccia, che d'ostinato da altri mi si dà.

Ma

Ma ſapete, mio gentiliſſimo Signore, in che hò errato? hò errato in non aver conoſciuto quanto grandi ſiano le forze dell' amor proprio, e in non aver conoſciuto, che niente men degl' altri homini, li Signori matematici, e filoſofi dall' impero di quello non vanno eſenti; perche ſe ciò aveſſi conoſciuto, ſeguendo l' eſempio degl' antichi, non aurei pubblicata una Invenzione, la quale quanto giova alla Matematica, tanto nuoce al particolare intereſſe di poco men, che tutti li matematici; dalla qual coſa ne avviene, che quelli, li quali vogliono ingiuſtamente tacciare la mia Invenzione, trovino preſta al loro ſoccorſo la moltitudine de' matematici. Ma credete voi, che la natura declinerà da quelle leggi, colle quali è ſtata da Dio creata?

E' legge eterna, che la verità, e la giuſtizia ſian ſempre inſultate, ed oſcurate dalla moltitudine, ma che non mai la moltitudine poſſa in tutto ſoffocarle, e molto meno eſtinguerle; laonde la verità, che nelle mie Opere ſi contiene, mal grado tutte le leghe, e tutte le gherminelle, aurà un giorno a venire al di ſopra: Ma in vero biſogna pur dire, che gl' inventori di nuove coſe, ſe non fanno dentro il lor animo una ſpecie di commercio con i ſecoli a venire, per modo che amino la gloria, ſono miſeri in quella guiſa appunto, che dicea S. Paolo, ch' erano miſeri i Criſtiani, ſe non ſi prefiggevano per loro ſcopo l' eternità; e ſe hanno da combattere con perſone, che della gloria a venire poco, o niun conto faccino, purche ſalvino nel tempo della lor vita il male acquiſtato concetto, non poſſono con altro conſolarſi, ſe non con la contemplatione della verità da eſſi ritrovata, e colla ſicura conoſcenza che hanno, che l' interno rimorſo non mai laſcia di tormentare in tutto, o in parte gl' huomini men che ſinceri. Tolga Iddio però, ch' io voglia aſſerire, che li Sig. moderni matematici ſiano men che ſinceri; ma voglio credere, che prevenuti da quelle dottrine, che gia aveano ricevute per vere, non ſi hanno ſin ora pigliato briga di ſtudiare la mia Invenzione, ſic-

come certamente è avvenuto de' signori Autori degl' atti di Lipsia; per la qual cosa devo a buona ragione sperare, che soddisfacendo io alle lor obbiezioni, mi renderanno quella giustizia, che mi deve rendere una sì dotta, ed illustre società. Intraprendo dunque di brievemente narrarvi le obbiezioni delli Signori Autori degli atti, con le mie risposte.

RI-

RISPOSTE

Alle obbiezioni fattemi dalli Signori Autori degli atti nel loro libro intitolato: *Actorum Eruditorum, quæ Lipsiæ pubblicantur, Supplementa.* Tom. VII.

AVVERTIMENTO.

IO aurei potuto a buona ragione tralasciar di rispondere alle obbiezioni fatte dalli Sig. Autori degl'atti alla Lettera da me diretta al Sig. Giacinto di Cristofaro l'anno 1718; imperciocche mi sarebbe stato sufficiente additar loro i luoghi nella mia Raccolta pubblicata l'anno 1721., nella quale si trovano gia da me prevenute le risposte a tutte le loro obbiezioni; ma perche dal leggere le obbiezioni mi sono avveduto, che gl'abbagli, che prendono li da me riveriti Signori degl'atti, in gran parte dipendono dal non aver' essi fatta molta riflessione all'ipotesi, ch'io sieguo nella mia Invenzione, ed al modo, col quale il Metodo degl'indivisibili si deve applicare alla mia ipotesi; ed anche dal non avere essi considerato il modo, col quale Galileo spiega la generazione della parabola; hò creduto, che utile cosa sia accennargli le cagioni de' loro abbagli. Risponderò dunque additando sempre i luoghi nella mia Raccolta, nella quale si trovano prevenute le mie risposte; ed insieme gli additerò li abbagli, che prendono, a fine d'ischiarar meglio la lor mente intorno alle verità, ch' io hò proposte.

Deve poi avvertire il Lettore, che quelle figure, le quali nell' accennato libro de' supplementi si trovano signate co i numeri 3, 4, 5, e 6, nelle nostre tavole sono signate co i numeri 37, 38, 39, e 40, e così ordinatamente

 in

in appresso, e ciò a cagione, che quando mi è pervenuto nelle mani il libro de' supplementi gia si era giunto al foglio 31 del libro, ch' io spero fra breve pubblicare col titolo. *Opere Matematiche di Paolo Mattia Doria tom.* 1. per la qual cosa volendo io inserire nella fine di quel libro questa risposta, mi è stato necessario seguir l'ordine delle figure di quel libro, che ancora stà sotto il torchio.

Li Signori Autori degli atti di Lipsia, nel loro libro intitolato: *Actorum Eruditorum, quæ Lipsiæ publicantur, supplementa, tom.* VII. dalla pag. 201. fino alla pag. 210. fanno relazione della lettera da me diretta al Sig. Giacinto di Cristofaro, e in quella relazione fanno alcune opposizioni a quello, ch' io hò detto in quella lettera, ed ancora una opposizione alla proposizione prima del mio Metodo ne' miei Dialoghi pag. 99. Narrerò ora brievemente le loro opposizioni colle mie risposte.

OBBIEZIONE. I.

NEl paragrafo primo, che comincia: *Principio familiari &c.*, e nel secondo, che comincia: *Et hic post argumenta &c.* altra cosa non fanno, se non che riferire la dimostrazione, ch' io feci per la via d' Euclide da me accennata nel principio delle risposte, che ho fatte al Relatore, e mi accusano di aver proceduto *per ambages*: mentre se io credeva, che 'l Metodo da me usato di calare le perpendicolari fusse sufficiente per dimostrare il mio assunto, perche, dicono essi, far quella dimostrazione, alla quale poi io medesimo ho fatta difficultà?

RISPOSTA.

SE io hò proceduto *per ambages* nella mia da loro accennata dimostrazione, essi però nelle opposizioni, che a me fanno, oltre gli manifesti abbagli, che prendono in Geometria, procedono in quelle contro alle

leggi

leggi stabilite da tutti gli geometri; imperciocche espongono le loro obbiezioni per la via de' calculi analitici, e si dispensano di fare la dimostrazione sintetica; cioche non è stato mai permesso a' geometri, solo che a nostri giorni, ne' quali molti de' signori geometri, sotto l' apparenza di perfetti calculatori coprono la poca intelligenza, che hanno del raziocinio sintetico; che sia così. E' legge stabilita fra' geometri, che si debba fare la sintesi dopo il calculo, e la ragione ancor lo insegna; perche tutti gl' huomini, che professano Geometria sono obbligati d' intender la Sintetica, essendo un istessa cosa Geometria, e Sintetica; ma non tutti gli geometri sono obbligati d' intender l' Algebra. Oltr' a ciò, nella Sintetica non vi puol essere inganno; imperciocche chiunque intende bene la Sintetica è certamente geometra: in vece che si puol essere pratico calculatore analitico, ed esser privo poco men, che in tutto del raziocinio sintetico, come si vede avvenire a nostri giorni. Li sudetti Signori poi non mai doveano praticare meco la via de' calculi analitici; perche in tutti li miei scritti io ho dichiarato, che procedo per la via sintetica, e che li calculi analitici ho procurato a bello studio dimenticarmeli. Tutto questo fà conoscere, che li sudetti Signori hanno studiato a dimenticarsi la Sintetica, giusto come io ho studiato a dimenticarmi l'Analitica: ma quanto siano ben riusciti in questo loro intento, si conoscerà chiaramente nelle seguenti loro obbiezioni.

OBBIEZIONE II.

NEl paragrafo terzo, che comincia: *Demonstratione generali idem porrò evicturus &c.* impugnano il Lemma, che si legge alla pag. 13. della mia Lettera diretta al Sign. Christofaro, e dicono, che in quel lemma, io hò peccato contro la proposizione XXII. del VI. d' Euclide a cagione, che hò detto, che le infinite radici intercette frà 1, e 2, frà 2, e 3 &c. degl' infiniti cubi

inter-

intercetti 'frà 1, e 8, frà 8, e 27 &c. devono essere in progressione aritmetica: E nel paragrafo quarto, che comincia *An non videt Autor &c.* asseriscono, che se io supponeva vere le mie dimostrazioni, doveva provare, che la parabola Apolloniana non si può descrivere col cerchio, e colla riga a cagione, che le applicate non terminano al perimetro di quella. Ma con tutto ciò per non recar pregiudicio alle curve, che han ricevute per linee geometriche, mi avvertono, ch' essi non intendono per ciò, che questa opinione sia vera, ma che doveva io dimostrarla come mia; ed in appresso mi accusano, come fa il Relatore, di non aver io definito, che cosa intenda per linea geometrica, e che cosa per linea meccanica.

RISPOSTA.

ALla prima obbiezione, cioè, ch' io abbia errato contro la proposizione XXII. del VI. d' Euclide, hò gia soddisfatto ampiamente nella risposta, ch' hò fatta al Relatore. In ciò che s' attiene poi a quello, che dicono, cioè. Ch' io doveva dimostrare, che la parabola Apolloniana non si può descrivere, a cagione, che le applicate non terminano al perimetro di quella, rispondo, ch' io hò dimostrato in tutta la Dissertazione, e dalla pag. 42 fino alla pag. 46 dell mia Raccolta, che la parabola Apolloniana non si può descrivere, e che nel mio Metodo ne' miei Dialoghi, e in tutta quella Raccolta hò dimostrato in varij modi, che le infinite radici delle infinite ascisse dell' asse terminano alle mie linee rette tirate da i punti estremi 1, e 2; 2, e 3; 3, e 4 &c. Ma perche nella antecedente obbiezione, e nel seguente paragrafo, nel quale li Sig. Autori degl'atti oppongono alla prima proposizione del Metodo ne miei Dialoghi, danno a divedere, che non considerano il modo, col quale si deve applicare il Metodo degl' indisibili alla mia legitima ipotesi; dopò narrata la seguente obbiezione mi

affa-

affaticherò di additarcelo per dissipare dalla lor mente quella nebbia, che malamente asseriscono ingombrare la mia.

OBBIEZIONE III.

NEl paragrafo V, che comincia con quelle improprie parole *Uti sperandum est, Autorem tandem aliquando &c.* Oppongono alla proposizione prima del Metodo ne' miei Dialoghi pag.99., e dicono aver io errato contro la definizione da me medesimo portata alla pag. 13. della mia Lettera, asserendo, ch' io dopò aver detto, che frà punto, e punto non si può intendere alcun punto di mezzo, suppongo, che in una linea si possa giungere all' ultima divisione, senza che vi rimanga più luogo a nuova divisione; ed aggiungono, che non rimane a me più luogo di far istanza, col dire, che se si supponessero infinite applicate tirate fino al perimetro della parabola le quali si eccedessero con differenze l'una dell' altra minore, l' asse verrebbe diviso in infinite parti diffuguali, ciò che sarebbe contro l' ipotesi; e la cagione, per la quale dicono, che a me non rimane più luogo all' istanza, si è, che a lor dire, l'asse, ch'io hò supposto diviso in parti infinite, e tutte uguali frà esse, riguardato nell' infinito, non è più la medesima cosa: mi è piaciuto rapportare tutto il paragrafo, per commodo di quelli, li quali non hanno il libro de' supplementi. *Uti sperandum est, Autorem tandem aliquando suorum ratiociniorum valore agniturum: Sic in notando paralogismo demonstrationis pag. 99. ad quam hic provocat Autor, breviores erimus, definitionem indivisibilis ab ipso pag.13. hujus Epistolæ allatam, QUOD INTER PUNCTUM, ET PUNCTUM ALIUD NON INTERPONATUR. Comparandam ipsi relinquentes cum eo loco dictæ demonstrationis, ubi sic arguit: Si DT est radix ipsius AD ducta TN normali ad DT, erit & EN radix ejusdem AD, & sic progrediendo, ad FI, radix per FI designata non erit communis Curva, & triangolo, sed sub FI cadet con-*

Tav.VII. Figura XXXVII.

contra hypotesim; & constructionem &c.; & comperiet perpendiculares NY in a C ad I ex indivisibili, seu infinitè parvo transire per finitum, & ad ipsum I punctum evadere denuo indivisibiles: & nè fortè instet continuam hanc variationem ipsarum YN contra hypotesim esse, quà axem AF in partes æquales divisum supposuit, observet perpendicolares YN, cum DE, EL ut indivisibilibus per totum axem spectatis easdem non esse.

RISPOSTA

ALla antecedente opposizione si risponde, che prendono abbaglio li Sig. Autori degl' atti nella supposizione, che fanno; imperciocchè nella mia ipotesi le differenze, che sono frà le parallele, che terminano alle mie linee rette, e le applicate, che terminano al perimetro della parabola, le quali essi nominano radici delle ascisse dell'asse, nell' infinito svaniscono in tutto; e perciò non si può più intender tirata alcuna linea retta, la quale cada fuori delle mie linee rette tirate da i punti estremi delle applicate di numero intero, cioè 1 e 2, 2 e 3, &c. fino all' infinito. Questo io l' hò dimostrato a bastanza dalla pag. 16. fino a 28 dell' accennata Raccolta, e l' hò provato non già per calculo analitico, perche io non entro in così profondi misterj, quanti son quelli dell' Analitica; ma l' hò provato per la via di un calculo numerico, il quale assai più sensibilmente, che i calculi analitici, fa conoscere le verità dimostrate. Con tutto ciò però, perche ben veggo, che gl' abbagli de' signori Autori degli atti dipendono dal non far essi riflessione alla natura, e alla essenza del Metodo degl'indivisibili, ed in consequenza di ciò, dal non considerare il modo, come quello si debba alla mia legitima ipotesi applicare; farò le seguenti brevi considerazioni intorno al Metodo degl' Indivisibili, e poscia, dimostrando di nuovo, che le accennate differenze nell' infinito svaniscono, additerò loro il modo, come si deve alla mia ipotesi il Metodo degl' Indivisibili applicare.

CON-

CONSIDERAZIONI

Intorno al Metodo dell' Indivisibili.

LA differenza, che vi è fra il Metodo d' Euclide, e quello dell' Indivisibili, non è altra, se non la seguente cioè. Euclide ordina, per esempio, che da un punto di un lato di un triangolo si tiri una linea retta, indi dimostra la proprietà, ch' ave assunta di dimostrare nella proposizione; e perche la proprietà è generale, in ogni punto del lato del triangolo si trova esser la medesima. Nel Metodo dell' Indivisibili all' incontro si dice; Intendasi il lato del triangolo diviso in punti, o parti infinite, e da ogni punto di esso s' intenda tirata una perpendicolare; indi si dimostra, che a tutte le infinite perpendicolari conviene una medesima proprietà.

Da questa idea dell' essenza del Metodo dell' Indivisibili, e di quello d' Euclide si deduce, che la differenza, che vi è fra il Metodo dell' Indivisibili, e quello d' Euclide, altra non è, se non che per Euclide s' ordina, che si tiri la linea retta, e per lo Metodo dell' Indivisibili s' ordina, che s' intendano tirate le infinite linee rette, e non si tirino realmente; e la cagione, per la quale non s' ordina, che si tirino realmente è solamente, perche supponendosi infinite, si possono intender tirate bensì, ma non si possono realmente tirare.

Ora dall' antecedente verità ne nasce per consequenza il seguente assioma riguardante le leggi del ragionare cioe: Che nel Metodo dell' Indivisibili si deve ordinare, che s' intenda fatta cosa, la quale si possa intender fatta; e in quello d' Euclide si deve ordinare, che si facci cosa, che si possa realmente fare *circino, & regula*: E che tanto nel Metodo dell' Indivisibili, acciò la dimostrazione sia generale, si deve dimostrare, che la proprietà proposta si trova, per esempio, in tutte le infinite parallele, che s' intendono tirate; quanto in quello d'Euclide si deve dimostrare, che la stessa proprietà si trova

in ogni punto del lato del triangolo, dal quale si tira una linea retta, o in ogni punto del cerchio, che si descrive.

Deesi considerare ancora nel Metodo dell' indivisibili un'altra proprietà diversa da quella, che si considera nel Metodo d'Euclide, ed è la seguente cioè: Che siccome da geometri si considerano ne'problemi le proprietà, che sono solamente particolari a cagione, che quelle solamente si ritrovano, o sono possibili in certi casi particolari: nel Metodo dell' Indisibili all' incontro quelle proprietà, che si ritrovano nel particolare non son vere, quando nell' infinito si ritrovano diverse, perche nostra mente intende, ch' il particolare non può ripugnare all' universale, ond' è ch' una cosa non può esser vera in particolare, quando nell' universale è diversa, ed in consequenza di ciò le differenze, che si ritrovano ne'particolari, quando all' infinito si diminuiscono, all' infinito devono svanire in tutto, a cagione, che ripugnarebbe alla natura dell'infinito in numero, se tutto ciò, che all'infinito si diminuisce, potesse avere in se essenza di quantità: e quindi è, che nel Metodo dell' Indivisibili, delle differenze, che all' infinito si diminuiscono non se ne tiene alcun conto, ma si considerano come prodotte dal difetto de' particolari, come per esempio, dalla differenza, che vi è frà il considerare le cose in numero, e in linea, e fra il considerarle in particolare, e in generale.

Tutto ciò, che abbiam detto, sarebbe sufficiente a far conoscere alli Signori Autori degl'atti la cagione dell' abbaglio, ch' han preso nell' opposizione da essi fatta alla proposizione prima pag.99.de'miei Dialoghi nel loro paragrafo, che comincia: *Uti sperandum est, Autorem tandem aliquando &c.* perche potrebbero conoscere, che quella proprietà da essi addotta cioè. Che in una linea retta, la quale s' intenda divisa in parti infinite, non si può mai divenire all' ultima parte, in virtù dell' antecedente assioma da me narrato, non fà al mio caso, mentre quello, che hò dimostrato nel Lemma alla lettera del

Sig.

Sig.Cristofaro è, che non si può mai intendere l'asse diviso in parti infinite,e ne meno la parabola si può intender descritta per i punti estremi d' infinite applicate, quando si vuole, che le infinite applicate s' eccedano fra esse con differenze una sempre dell' altra minore, e tutto ciò a cagione, che le differenze l' una dell' altra minore, nell'infinito svaniscono; questo io l' hò dimostrato coll' accennato calculo da cart. 16. fino a cart.28. nella mia Raccolta; ma con tutto ciò voglio ora dimostrarlo di nuovo in consequenza delle da me accennate considerazioni, perche, siccome nella Raccolta ho dimostrato, che svaniscono le differenze fra le ascisse dell' asse, nella seguente proposizione dimostrerò, che svaniscono le differenze fra le radici.

PROPOSIZIONE.

SI dimostra, che se la parabola si suppone descritta sino all' infinito; nell' infinito le radici vanno a terminare alle nostre linee rette tirate per i punti estremi delle applicate 1, e 2; 2, e 3; 3, e 4 &c.

Supponga si fatto il nostro Rettilineo parabolico piano, nel quale l' asse AL sia ugule a 16 unità AB; e BC sia 1, DE2, FG3, ed LM4; ed intendansi tirate le nostre linee rette, AC, CE, EG, GM, le quali formano il perimetro della nostra vera curva; e prolunghinsi le rette EC, GE, MG, fin che s' incontrino coll' asse allungato ne' punti K, H, ed I; e l' asse AL s' intenda diviso in punti, o parti infinite; e dagl' infiniti punti intendansi tirate le applicate come PR, SV &c.. Dico,che se l'asse s'intenderà prodotto fino all'infinito, le differenze, che sono fra le parallele, che terminano alle nostre linee rette, come CE, EG &c., e le applicate, che terminano al perimetro della parabola, nell' infinito svaniscono in tutto, e le applicate, o siano le radici terminano alle nostre linee rette descritte per i punti estremi delle applicate di numero intero cioe, 1, e 2; 2, e 3; 3, e 4 &c. fino all'infinito;

Tav.VII. Figura XXXXI

 ed

ed in appresso noi nomaremo eccessi le differenze, che sono fra le nostre parallele, e le applicate, come sono QR, TV, &c.

DIMOSTRAZIONE.

Perche l'Avversario suppone, che le applicate, che terminano alla curva, si eccedano fra esse con differenze l'una sempre minore dell'altra, gl'eccessi, come sono QR, TV &c. si eccederanno con differenze l'una sempre minore dell'altra; perche le intercette fra BC1, e DE2 essendo in proporzione aritmetica nella serie delle parallele contenute nel triangolo KDE; e le intercette fra DE2, ed FG3 essendo in proporzione aritmetica nella serie delle parallele contenute nel triangolo HFG: le porzioni delle applicate, le quali si possono eccedere fra esse con differenze l'una sempre minore dell'altra, sono solamente gl'eccessi, come QR, TV &c. Dimostreremo ora, che le differenze fra gl'eccessi si diminuiscono all'infinito.

Nelli triangoli DKE, e DHE, l'angolo DKE è maggiore dell'angolo DHE. Ma nelli triangoli AKC, e KHE, l'angolo AKC è stato dimostrato maggiore dell'angolo KHE; e l'angolo ACK è maggiore dell'angolo AKC, perche il lato KA è maggiore del lato AC, dunque l'angolo ACK è maggiore dell'angolo KHE.

Ma l'angolo KHE è maggiore dell'angolo KEH, perche il lato KE è maggiore del lato KH; e l'angolo ACK è stato dimostrato maggiore dell'angolo KHE, dunque l'angolo ACK è molto maggiore dell'angolo KEH. Dell'istesso modo si dimostra, che nelli triangoli KEH, ed HGI, l'angolo KEH è maggiore dell'angolo HGI.

E se si prolunga l'asse AL, fin che venga uguale a 25 unità AB, e si tira l'applicata uguale a 5 unità AB; e per il punto M, ed il punto estremo dell'applicata 5 si tira la nostra linea retta, e questa si prolunga per modo, che

che s' incontri colla LI allungata; l'angolo HGI farà molto maggiore dell'angolo, che fa nel punto M la retta tirata per i punti estremi dell'applicata 5, e per il punto M, la quale si produca fin che s' incontri colla LI allungata: E dello stesso modo divengono sempre tanto piu minori gl'angoli, che le ipotenuse nate dalle nostre linee rette EG, GM &c. allungate fanno colle nostre linee rette, come CE, EG &c. quanto piu crescono le applicate di numero intero 1, 2, 3, 4, e 5, &c. E perche le applicate di numero intero crescono fino all' infinito, gl' angoli si diminuiscono fino all' infinito.

Ma se gl' angoli si diminuiscono fino all' infinito; le differenze tra gl' eccessi intercetti fra AC, e CK, fra CE, ed EH, fra EG, e GI &c. si diminuiranno all' infinito, cioè le differenze intercette fra EG, e GI, saranno minori delle differenze intercette fra CE, ed EH, e le differenze intercette fra CE, ed EH saranno minori delle differenze intercette fra AC, e CK; perchè se le differenze fra gl' eccessi non si diminuissero nell'infinito, gl'eccessi anderebbero a terminare in una delle ipotenuse, come HE, IG &c. e per esempio. Se le differenze l'una dell' altra minori, che si suppongono essere fra gl' eccessi QR, mantenessero sempre una medesima continuata proporzione, gl' eccessi QR, dovendo sempre essere uno maggiore dell' altro, e gl' angoli fino all' infinito uno minore dell'altro; alla perfine nell' infinito gl' eccessi anderebbero a terminare in una Ipotenusa. Adunque gl' eccessi TV si devono eccedere fra essi con differenze diverse da quelle, colle quali s' eccedono le differenze QR, e per ciò gl' eccessi devono diminuirsi in lunghezza fino all' infinito.

All' incontro le parallele intercette fra BC1, e DE2, fra DE2, e FG3, fra FG3, ed LM4 &c. crescono sempre in lunghezza, quanto più crescono in lunghezza le applicate di numero intero; perchè le parallele intercette fra BC1, e DE2 essendo in proporzione aritmetica nella serie delle parallele contenute nel triangolo KDE; e le paral-

parallele intercette 'fra DE2, e FG3 essendo in proporzione aritmetica nella serie delle parallele contenute nel triangolo HFG, e così sempre; le parallele intercette fra BC, e DE, fra DE, e FG, fra FG, ed LM &c. cresceranno sempre in lunghezza, quanto più crescono in lunghezza le applicate di numero intero. Ma le applicate di numero intero cioè 1, 2, 3, &c. crescono in lunghezza sino all'infinito, perchè sono infinite in numero, adunque le nostre parallele, le quali terminano alle nostre linee rette AC, CE, EG &c. cresceranno in lunghezza sino all'infinito.

Ma noi abbiamo dimostrato, che gl' eccessi QR; TV &c. si diminuiscono in lunghezza sino all'infinito; e che gli eccessi QR, TV &c. sono le differenze fra le applicate, che terminano alla curva, e le parallele, che terminano alle nostre linee rette: Adunque, per l'assioma da noi dedotto dal Metodo degl' Indivisili, le differenze fra le nostre parallele, e le applicate, le quali per l' Avversario terminano alla curva, nell'infinito svaniscono in tutto, e le radici delle ascisse dell' asse terminano alle nostre linee rette AC, CE &c. ch' è ciò, si dovea dimostrare.

CONSIDERAZIONE.

ORa è degno d' avvertirsi, ch' il Metodo dell' Indivisibili ci mostra mirabilmente la verità, che nella mia proposizione si contiene; perche, siccome io hò dimostrato nella proposizione prima del mio Metodo, fra BC1, è DE2 vi è la somma delle radici di tutti li quadrati intercetti fra AB1, ed AB4; e fra DE2, e FG3 vi è la somma di tutte le radici de' quadrati intercetti fra AD4, ed AF9: donde ne avviene, che le differenze, o siano gl' eccessi, che vi si aggiungono fuori delle nostre linee rette CE, ed EG, a fine di descriver la curva, siano superflui alle radici, e come superflui il Metodo dell' indivisibili ci fà vedere, che nell' infinito svaniscono. Questo

ſto medeſimo, ch'ora abbiamo dimoſtrato, ſi legge dimoſtrato nella noſtra Raccolta dalla pag.16. fino a 28. in altro modo per lo mezzo di un calculo aritmetico.

Ecco dunque, che li Signori Autori degl' atti poſſono conoſcere, ch' io non hò errato nella propoſizione del mio Metodo ne' miei Dialoghi pag.99., mentre nell' antecedente propoſizione hò dimoſtrato, che non ſi poteva mai ponere per ipoteſi, che le infinite radici delle aſciſſe dell' aſſe ſi eccedeſſero fra eſſe con differenze una minore dell'altra; ond' è, che ſon vane quelle parole, che ſi leggono nel rapportato loro paragrafo, cioè: *Ex indiviſibili, ſeu infinite parvo tranſire per finitum, & ad ipſum punctum I evadere denuò indiviſibiles*; perchè io hò dimoſtrato, che nella mia ipoteſi, le differenze, l'una ſempre minore dell'altra, che ſi conſiderano nelle applicate, che terminano alla curva, nell' infinito ſvaniſcono, e le radici ſi riducono alla proporzione aritmetica, e perciò le radici terminano alle mie linee rette. E ſe per avventura diceſſero, che io doveva allora fare queſta dimoſtrazione, ch' ora hò fatta, per far conoſcere, che quella proporzione, colla quale le quantità s' eccedono con differenze l' una dell' altra minore, non hà che fare al mio caſo. Riſponderei, per primo, che le perpendicolari, ch' io ordinava, che ſi calaſſero fino alle linee rette eran tutte l' una dell' altra minore, onde li Sign. Autori degl' atti potean conoſcere anco per mezzo di quelle, che le differenze ſi diminuiſcono all' infinito: E per ſecondo riſponderei, che l'accennata proporzione non hà, per quanto io ſappia, alcun uſo in Geometria, e ſolamente vale per moſtrare con un eſempio ſenſibile la diviſibilità all' infinito, la quale ſi eſamina in Filoſofia, onde non era io tenuto a ſupponerla nella mia ipoteſi.

Da tutto queſto ſi deduce, ch' io nella mia propoſizione pag.99. ne' miei Dialoghi poteva a buona ragione dire, che ſe le radici non ſono in proporzione aritmetica, l'applicata DE2 non ſarebbe radice di AD4, ed eccone di nuovo brievemente la pruova.

Quan-

Quando non si suppone „che le radici infinite intercette fra BC1, e DE2 si eccedono con differenze l'una minore dell' altra ; o si eccederanno in proporzione aritmetica , o si eccederanno in una proporzione maggiore dell'aritmetica , cioè ,che la differenza fra la terza, e la seconda sarà maggiore della differenza fra la seconda , e la prima ; ma se si eccedono in proporzione aritmetica, terminano alla nostra linea retta CE; e se si eccedono nel secondo modo , tra le intercette fra BC1, e DE2 si troverà la TX uguale a DE2; perchè, se tra le infinite intercette fra BC1, e DE2, le quali sono in proporzione aritmetica , e terminano alla retta CE, vi sono tutte le differenze possibili, che si comprendono fra 1, e 2. Nello MN intercette fra BC, e DE, che si eccedono con differenze maggiori della ugualità, si giungerà alla somma di 2, prima di giungere al punto D, e perciò TX sarà uguale a DE2, e TO passerà fuori della perpendicolare EI. Ecco dunque, che non abbiamo commesso errore nella nostra proposizione prima del Metodo alli Dialoghi, ma solamente abbiamo trascurato di considerare una proporzione, che non era applicabile alla nostra ipotesi.

Tav. VII. Figura XXXXII

Ma con tutto ciò nell' accennata Raccolta pag. 8. hò dimostrato, che le radici si devono eccedere in proporzione aritmetica, e in quella dimostrazione hò posto per ipotesi, che le radici si eccedono con differenze l'una minore dell' altra , e dimostrato , che non si possono eccedere coll'accennate differenze una minore dell'altra; ed alla pag. 34. hò dimostrato , che la parabola Apolloniana non si può descrivere come una curva continuata , perche le differenze fra le applicate minori dell' unità, come sono KZ svaniscono nel punto C , e le differenze fra le applicate , come sono LN, svaniscono nel punto E. Dalla qual cosa ne avviene , che cominciando un' altra serie, la curva debba far angolo ne' punti C, ed E, e in tutti gl' altri punti estremi delle applicate di numero intero ; e questo lo dimostreremo ancora più chiaramente in appresso ; Qui invero potrei terminare le mie risposte

alli

alli Signori Autori degl' atti, perche in virtù delle mie dimostrazioni tutto quello, che dicono in appresso non puol esser vero, ma voglio narrar le altre loro obbiezioni a fine solamente di far conoscer gl' abbagli, che prendono.

OBBIEZIONE. IV.

DAl paragrafo, che comincia: *Jam facienda est mentio illius loci, pag.*205. fino al paragrafo, che comincia: *Nam manifestum, vel ex ipsa figura &c.* mi danno le seguenti accuse. Nel principio asseriscono d'aver essi risoluto il problema da me proposto al Sig. Giacinto di Cristofaro, che si legge alla pag.25. della lettera da me a quello diretta, e rapportano la loro pretesa dimostrazione; indi mi accusano delli seguenti errori, cioè: Per primo di aver io ignorato, che Galileo non avrebbe potuto dimostrare la direzione del moto de' corpi projetti, se non avesse dimostrato, che in ogni punto il perimetro della parabola è una curva. Per secondo mi accusano d' aver io confusa la descrizione del cerchio colla natura del cerchio a cagione, che hò detto, ch' il cerchio si descrive per tre punti, quando il cerchio si descrive per due; e con ciò concludono, ch' io hò confusa la proposizione V. del IV. di Euclide col postolato; *Dato centro, & intervallo circulum describere*. Per terzo mi accusano di errore, perche pretendono aver io detto, che la parabola si descrive per tre punti, come il cerchio, e concludono, che la parabola si descrive bensì per tre punti, ma che non si può determinare, che almeno per cinque. Per quarto dicono, ch' essi non potrebbero determinare, che cosa io intenda per costruzione geometrica, che per meccanica; e concludono, che quella prevenzione di mente, ch' io attribuisco alli moderni geometri, si deve a buona ragione a me attribuire; e che in conseguenza di ciò io non posso aver fatto alcuna ingiuria alli Signori Autori degl' atti con i miei Dialoghi pubblicati l' anno 1718.

Aggiungono poscia, ch' essi vorrebbero piu tosto esser privi di quell' onore, che mi attribuisco a cagione dell' approvazione del Sig. Monforte, di quella del Signor Cristofaro, e di quella de' Signori Giornalisti di Venezia, ch' esporsi al pericolo di esser tacciati del difetto d' avere appalesato il lor sentimento men liberamente di quello, ch' essi son soliti di fare. Alla perfine parlano ostentando una franchezza d' animo tale, quale appunto si converrebbe ad huomini, li quali chiaramente vedessero una verità, ed avessero tutta la ragione dalla lor parte: Ma in vero se li Signori Autori degli atti vorranno una volta fare una seria riflessione agli abbagli, ne' quali inciampano a cagione de' falsi metodi, che sieguono, si può sperare, che se veramente sono sinceri, come vantano d' essere, debbano confessare la verità, che nella mia Invenzione si contiene. Faremo intanto conoscere colla seguente risposta i danni, che arrecano i falsi metodi da essi seguitati.

RISPOSTA.

Per primo io rispondo, che male a proposito li Signori Autori degl' atti si lusingano d' aver risoluto il problema da me proposto al Signor Cristofaro; e in pruova di ciò narrerò in breve quello, ch' essi fanno.

Tav. VI. Figura XXXVIII.

Li sudetti Sign. prendono per parametro la AB, la quale ancora prendono per semidiametro del cerchio ACD; e poi ritrovano per lo mezzo di un calculo superfluo, che NS è mezza proporzionale fra AB unità, ed AN, ed asseriscono, che per la stessa via ne possono ritrovare quante ne vogliono: Indi suppongono descritta la loro parabola ASCI, ne si degnano di prolungare la BD uguale ad AB, per modo che venga uguale a 4 unità AB, ne tirano l' applicata 2, ne tirano le mie due linee rette tirate per i punti estremi di A, e C, e per i punti estremi dell' applicata 1, e 2. In somma descrivono in piano col modo loro ordinario la parabola, niun conto facendo della

la mia ipotesi, e dicono di aver risoluto il problema. Vediamo ora quale fù la soluzione del problema, da me domandata al Sig. Cristofaro.

Nel problema da me proposto al Sign. Cristofaro, li domandai bensì, che m' insegnasse, come tirate le mie linee rette AC, e CE, si potesse determinare un punto nella linea FG, per il quale dovesse passare il perimetro della parabola; ma li domandai ancora, come tirando la CE si possa determinare un punto nella ZT, per il quale passi il perimetro della parabola, e come si possa determinare il loco delle infinite applicate. Ora tutto questo addimandai al Signor Cristofaro a fine di farli conoscere, che le infinite applicate, le quali si suppone, che terminino alla curva, non han punti determinati, alli quali necessariamente terminino; e li miei riveriti Signori Autori degl' atti, *nulla habita ratione* della mia ipotesi, descrivono in piano la loro parabola ordinaria. In vero se quella celebre Accademia non hà fatta qualche legge, colla quale abbia ordinato, che nel risolvere i problemi, non si debba seguire l'altrui ipotesi, non mi sembra, che possino dire d' aver risoluto il mio. O se forse han posto per legge, che la mia ipotesi non si debba esaminare, erano inutili tante ciancie, quante son quelle, che han dette in quella loro relazione. Faremo vedere ora la cagione dell'abbaglio, che han preso.

Tav. VII. Figura XXXXIII

Deesi considerare, che l' abbaglio, che prendono li Signori Autori degl' atti, consiste in ciò, ch' essi credono, che prese per costruzione almeno cinque applicate, si possa descrivere la parabola, quando la parabola non si può mai intender descritta per qualunque numero d' applicate particolari, che si prendano per costruzione; e ciò a cagione, che si dimostra, che la curva non è luogo generale delle infinite radici, appunto come noi abbiamo dimostrato nell' antecedente proposizione, e in tutta l' accennata Raccolta, e particolarmente dalla pag. 42. fino a 49. Ma dimostreremo di nuovo, che i punti estremi delle applicate all' asse della parabola Apolloniana

non si possono, a similitudine di quelli delle applicate al diametro del cerchio, determinare; ed eccone la pruova.

Tav.VII. Figura XXXXIIII

Nel nostro Rettilineo ABCDEFG, il quale per esempio abbia AG9 per asse, supponganfi prese per costruzione ML, NL, SL, VY, e le applicate BC1, DE2, ed GF3; dunque potremo per l' Avversario descrivere la curva.

Ma io rispondo, se per l'Avversario si suppone, che le infinite applicate, tutte l'una maggiore dell'altra, si eccedano l' un l' altra con differenze una minore dell' altra, si possono eccedere con differenze l' una minore dell' altra, ma in diversissime lunghezze; e ciò perche le differenze l' una minore dell' altra posson essere infinite, e diverse, come si vede ancora ne' numeri; come per esempio; gli eccessi QL possono eccedersi con differenze una minore dell' altra, e le applicate possono terminare a diversi punti degl' intercetti fra AC, e CH, e con ciò la parabola potrà segare la QR, e la QZ in ogn' uno de' punti intercetti fra Q, e R, fra Q, e Z. Ma se è così, bisogna, che li Signori Autori degl' atti determinino in qual proporzione debban essere le infinite applicate, colle applicate prese per costruzione, acciò eccedendosi frà esse le infinite applicate con eccessi uno minore dell' altro, si possano determinare i punti infiniti, per li quali deve passare la curva. Alla perfine bisogna, che determinino il luogo, al quale terminino le infinite applicate, e con ciò, che determinino le differenze, l' una minore dell' altra, colle quali si devono eccedere l' un. l' altra le infinite applicate; ciò che non avviene del cerchio, nel quale ogn' applicata non può terminare ad altro, che ad un solo punto della circonferenza.

Tav.VII. Figura XXXXV

Adunque l'abbaglio che prendono consiste in ciò, ch' essi suppongono esser proprietà generale quella, la quale non è, ch' un problema particolare, e meccanicamente descritto: e quindi è, che nella loro curva, prendendo essi AB per parametro, AG per asse infinito, e le appli-

cate

cate CD, EF, e GH prese per costruzione collo stromento meccanico, suppongono poi, che in tutti gl' altri punti intercetti fra A, e D, fra D, ed F, fra F ed H, si trovi la stessa proprietà, come si trova nel cerchio, ciò che poi si conosce non esser vero, quando venendo alla mia da essi disprezzata costruzione, si divide l' asse nelle parti 1, 4, 9, &c. perche all' ora si vede, che le infinite applicate terminano alle mie linee rette, e che per molte applicate particolari, ch' essi prendano, non mai trovano il loco generale delle radici.

Ma per rendere in tutto chiari li Sign. Autori degl' atti dell'abbaglio, che prendono, credendo, che la parabola Apolloniana abbia proprietà ferme, e costanti, come il cerchio: Farò vedere loro chiaramente, che non si possono mai determinare i punti estremi delle infinite applicate, per modo, che 'l perimetro della parabola si possa intender descritto come una curva continuata, e che per ciò quelle porzioni di applicate, che si pongono fuori delle nostre linee rette tirate per i punti estremi delle applicate di numero intero 1, 2, &c. e le quali noi nomiano eccessi, sono superflue alle radici, appunto come abbiamo dimostrato poc' anzi.

Nella nostra proposizione, che si legge alla risposta dell' obbiezione terza, abbiamo detto, che gl' eccessi TL non si possono eccedere fra essi con differenze l'una minore dell'altra, le quali siano le medesime, colle quali si eccedono gl' eccessi QL. Appartiene dunque alli Signori Autori degl' atti determinar le lunghezze degl' eccessi TL, e le differenze colle quali si devono eccedere fra essi.

Tav. VII. Figura XXXXIIII

Oltre a ciò si dimostra chiaramente, come noi abbiamo dimostrato dalla pag. 8 fino a 12 della nostra Raccolta, che la parabola non si può intender descritta come una curva continuata, ed eccone di nuovo brievemente in altro modo la pruova.

Se si suppongono divisi in parti infinite, AB, HB, HD, ID lati di triangoli, nel punto C svaniranno tutte

le

le differenze l'una dell' altra minori, che dall' Avversario si suppongono essere negli eccessi QL. Ma se è così, fra gl' eccessi TL comincia un altra serie di eccessi, la quale non può avere una medesima continuata proporzione cogl'eccessi QL: e se è così, qualunque lunghezza, che si voglia assegnare agl' eccessi TL, il perimetro della parabola deve far angolo curvilineo nel punto C; e dell' istesso modo svaniscono tutte le differenze nel punto E, e la prabola fa angolo curvilineo nel punto E. Vero è bensì, che nell'infinito cessano ancora gl'angoli curvilinei, perchè gl' eccessi svaniscono, siccome abbiamo dimostrato: Da tutto questo si vede, che li Sign. Autori degl' atti non possono dire: *Denuò transire per indivisibile*.

CONSIDERAZIONE.

E' Degna cosa da considerarsi, che se l' asse AG s' intenda diviso in parti infinite, siccome lo abbiamo inteso noi nella proposizione, che si legge alla risposta dell' obbiezione terza; all' ora sembra, che la curva si possa continuare all' infinito, ma poscia si dimostra, come abbiamo dimostrato noi, che gl' eccessi nell' infinito svaniscono in tutto; e che all' incontro poi, se si suppongono divisi in punti, o parti infinite i lati AB, HD, IG &c., si ritrova, che non si può supponere, che gl' eccessi siano porzioni delle radici delle ascisse dell' asse; perchè non si può intendere continuata la proporzione fra gl' eccessi, che sono in diversi triangoli da A in C, da C in E &c.

Si conosce poi chiaramente, che le nostre linee rette AC, CE, EF formano il perimetro di quella curva, la quale appunto han desiderato gl'antichi, che si ritrovasse, perchè alle nostre linee rette solo si ritrovano le infinite radici: e quantunque le parallele, che partono da i punti della BD, non siano infinite, quando si considera BD come porzione del latoHD, e lo stesso di tutti gl'altri lati; le por-

porzioni d' ipotenuse però, come CE, EF, e tutte le altre, sono infinite in numero, a cagione, che potendosi intender tirate per i punti estremi delle infinite applicate di numero intero, non chiudono mai spazio, e con ciò nella nostra curva le radici sono infinite; adunque la nostra curva si compone di pezzi d' ipotenuse, ed è il vero luogo delle radici delle ascisse dell' asse: E se a tutto quello, che abbiamo detto in questa considerazione, altri poco inteso del Metodo dell' indivisibili dicesse, ch' io nella costruzione da me fatta poc' anzi hò ordinato, che la stessa linea IG si divida piu volte in punti infiniti, come nelle porzioni AB, HD &c. Risponderei, che le linee AB, HD, ID nella mia ipotesi son diverse, perche son lati di diversi triangoli, e che, per il Metodo dell' indivisibili, si può ordinare, che tutte le linee diverse fra esse, s'intendano divise in parti infinite, quando si considerano come lati di diversi triangoli, e concluderei, che questa opposizione è giustamente, come quella di coloro, i quali fanno il seguente argomento cioè. Ogn' huomo hà infiniti capelli, gl' huomini sono infiniti, dunque sono piu gl' infiniti capelli, che gl' infiniti huomini.

Alle altre ciance poi, che dicono cioè; per primo, che Galileo non avrebbe potuto dimostrare la direzione del moto de' corpi projetti, se non avesse dimostrato, che 'l corpo projetto descrive il perimetro della parabola. Rispondo, che Galileo trattava di Fisica, non di Geometria, e ch'io alla pag. 50. sino 52. della mia Raccolta hò dimostrato le vere linee, che descrive il corpo projetto.

A quello, che per secondo dicono cioè; d'aver io errato per aver detto, che la parabola si descrive per trè punti. Rispondo aver io detto, che la parabola deve passare per i miei tre punti A, C, E, cioè per il vertice, e per i punti estremi delle applicate 1, e 2; e dico, ch' essi hanno errato non nelli termini, ma nell'essenza della verità, quando han supposto potersi descrivere prendendo cinque, sei, o piu applicate per costruzione.

A quel

A quello, che per terzo dicono cioè ; avere io errato confondendo la V. proposizione del IV col postolato. Rispondo, ch'io hò inteso dire, che il cerchio passa per tre punti, ma con ciò non hò preteso determinare il numero de' punti, colli quali si può spiegare la natura del cerchio. E poi rispondo, ch'io non nutrisco nell'animo la vanità di essere infallibile, difetto del quale m'accusa temerariamente il loro Relatore, ond' è, che nulla importarebbe, ch' io avessi errato in qualche termine di parlare, ma che gli esortarei a riguardare piu a i loro essenziali errori di raziocinio, che ad andar mendicando cavilli contro di mè.

A quello, che per quarto dicono cioe; ch'essi non possono determinare, che cosa io intenda per geometrico, e che per meccanico. Rispondo, come hò risposto al loro Relatore, che in tutte le mie Opere mi son dichiarato, che per geometrico intendo quello, che *circino, & regula* si descrive; e ch' essi son quelli, li quali han guasta, e corrotta la Geometria, ricevendo per linee geometriche quelle, che si descrivono con istrumenti di moto composto, che vale a dire meccanici, la qual cosa non han mai pensato di fare gli antichi geometri.

Mi rimane ancora di rispondere a quelle vane parole delli Signori Autori cioe; ch' essi vorrebbero piu tosto esser privi dell' onore, che attribuisco a me stesso per l'approvazione del Sign. Monforte, per quella del Signor Cristofaro, e per quella delli Sign. Giornalisti di Venezia. Ma a questo io rispondo, che i detti Sign. Autori come non avvezzi a seguire in Geometria le altrui ipotesi, non le sieguono ne meno nelle materie riguardanti gl' umani discorsi, mentre essi non possono dire a buona ragione, ch' io abbi vantata l'approvazione del Sig. Cristofaro, ne quella delli Sign. Giornalisti di Venezia; perchè, per ciò che s'attiene al Sign. Cristofaro, io hò fatto vedere in tutti i miei scritti, che io voleva per oppositore scoverto, e non mai per approvatore: E per ciò, che si attiene alli Sign. Giornalisti di Venezia, ho lodata bensì ne' miei Dialoghi la loro prudenza, e la lor cortesia nel

co-

riferire il mio Metodo, ma non hò vantata espressamente la loro approvazione. Quella del Sign. Monforte poi l' hò vantata, e la vanto, come approvazione d' huomo dotto, libero, e sincero, il quale parla non gia ambiguo, come gl' altri, senza spiegare se approvi, o non approvi; ne fà la figura ora d' anonimo oppositore, ora di relatore in generale, ne usa altre simili gherminelle, ma impugna apertamente le obbiezioni de miei Oppositori, e nell' approvare le mie proposizioni, dice chiaramente, come si legge nella sua lettera; *Convinto dalle vostre dimostrazioni, restai persuaso, siccome è succeduto di tutte le altre*. Così dunque l'approvazione del Signor Monforte è quella sola, che vanto, e le altre non mica le disprezzo, ma non le cerco, sapendo, che la verità si apre da se stessa la strada almeno col tempo.

OBBIEZIONE. V.

Tav. VI. Figura XXXIX

NElli paragrafi che sieguono descrivono il mio Rettilineo parabolico piano, e chiamano AB1, AF4, ed AD quadrato 2; poi descrivono la curva ACYI, e tirano la DY sino alla curva, e la chiamano $\sqrt{2}$, e tirano la retta IY, e la prolungano sino in Z dove s'incontra coll'asse FA allungato: Indi pretendono provare contro di me, che la terza proporzionale di ZI, e di ZY sia ZX, e che perciò la parallela XV uguale all'unità CB, sia terza proporzionale di FI, e DY; ed il modo, col quale pretendono dimostrarlo è il seguente.

Calano la YR parallela a DF, e supponendo AD $=2$, DY $= \sqrt{2}$, descrivono la parabola AYI: poscia formano la seguente analogia; ZI, ZY, ZX continue proporzionali, indi la riducono alla seguente IR : DF :: DY : DZ, e questa di nuovo la riducono alla seguente IR: DF :: IF: FZ, e moltiplicando i mezzi per gl'estremi, credono trovare, che VX sia terza proporzionale di FI, e di DY, ecco le loro parole: *Nam cum ipse investigandum sibi sumat, quid sequatur, si cum Apollonio fiant AD= 2, & per consequens*

quens DY = Υ2, ducatur verò ZYI, fiantque porrò ZI, ZY, ZX proportionales continuæ, ratiocinationem saltem legitimè prosequendo, ducendoque IR parallelam ad DF, deprehensurus fuisset esse IR: DF :: DY: DZ. Itemque IR: DF :: IF: FZ; poi asseriscono, che niente Apollonio ripugna ad Euclide, siccome io aveva preteso di dimostrare, e passano alla seconda obbiezione.

Tav. VI. Figura. XXXX.

Costruiscono la figura nel modo da me ordinato cioè, che AB sia 1, AF4, BC1, ed FI2, e tirano la linea retta CI; indi si affaticano di dimostrare, che nel triangolo TFI, OP uguale a DY, sia uguale a Υ2, ed il mezzo, che adoperano è il seguente. Calano la perpendicolare CS, e considerano i due triangoli CSL, TFI; poi per lo mezzo di un calculo analitico provano, come io hò provato prima nella mia Raccolta, che TF è uguale a 6., e TB uguale a 3: Indi moltiplicano 3 per 6, e per lo mezzo di un calculo analitico si figurano di provare, che OP uguale, com' essi dicono, a Υ2, sia radice di AD; e ciò dicono a cagione, che se si moltiplica 3 per 6, la Υ 18 cade al punto O intercetto fra AD2, ed il quadrato AF4; e con ciò concludono, che nel mio Rettilineo parabolico piano la Υ 2 cade al punto O dell'asse.

RISPOSTA.

L'Abbaglio, che prendono li Signori Autori degl'atti, consiste in ciò, ch'essi nominano AD quadrato 2, e DY Υ2, ciò che per la mia ipotesi non può farsi, a cagione, che i quadrati intercetti fra AB1, ed AF4, e le radici intercette fra BC1, ed FI2 non si possono, perche irrazionali, esprimere in numero. E quì mi reca meraviglia il vedere, che li sudetti Signori non abbino osservato, ch' il Sign. Monforte ha notato questo medesimo errore nella sua lettera alli Signori Ariani, e Galizia, alli quali ancor io l' hò notato nella mia risposta alla pag. 78, e 79 di quel Metodo, del quale il loro Relatore fece relazione; onde si vede, che oppongono senza legge-

re,

re: ma perchè li Sign. Autori degl' atti non ben comprendono la cagione, per la quale non si può nomare AD quadrato 2, e DY ♈2, quantunque a carte 25 della mia Raccolta io lo abbia assai largamente dimostrato, farò le seguenti considerazioni, per vedere se mi riuscisse di farli intendere questa verità.

CONSIDERAZIONI

Intorno alle cagioni dell'abbagli, che han presi li Signori Autori degl' Atti.

La vera cagione dunque del loro abbaglio dipende dal non ben intender essi la natura della generazione della parabola spiegataci da Galileo: ed ecco come.

La parabola descritta nel modo insegnatoci da Galileo, ci apporta bensì il seguente vantaggio cioè; che fra le infinite applicate vi son quelle di numero intero, cioè 1, 2, 3, e 4, le quali sono espresse in linea, ed in numero; e parimente fra gl'infiniti quadrati vi son quelli espressi in linea, ed in numero, cioè 1, 4, 9. &c. il qual vantaggio non si ritrova nella parabola Apolloniana descritta senza considerare nell'asse i numeri interi: ma non perciò da questo ne avviene, che li quadrati particolari intercetti fra 1, e 4, e le radici particolari intercette fra 1, e 2, si possano esprimere in linea, ed in numero; e ciò perchè nelli quadrati intercetti, li numeri non corrispondono giustamente alli quadrati particolari in linea, ed alle radici particolari in linea, ed eccone la pruova.

Tav. VII. Figura XXXXIII.

Il grave, che si suppone andare di moto accelerato per l'asse AD, in istanti di tempo uguali descrive spazii disuguali, li quali sono i quadrati de' momenti di tempo uguali; e la cagione di ciò si è, che in ogni punto dell'asse, il grave acquista momento uguale, e si accelera uniformemente; ond'è, che in numero li momenti di tempo uguali descrivono i quadrati 1, 4, 9, &c.

All'incontro il grave, che si suppone andare di moto

equabile per la BVuguale a DE2,in istanti di tempo uguali,descrive spazii uguali:ora da ciò ne avviene,che negl'intercetti, li numeri non possano giustamente corrispondere alle radici in linea, ed alli quadrati in linea; perchè, per esempio,se quando il grave,che cade per il perpendicolo,è giunto in S, punto estremo di AS doppia dell'unità AB, il grave, che corre di moto equabile per la BV,avesse giustamente descritta la radice in numero di 2; dell'istessa maniera il grave, che cade per il perpendicolo AD, quando sarebbe gionto in una porzione dell'asse AD, tripla dell'unità AB, il grave che corre di moto equabile per la BV, avrebbe descritta la radice del numero 3; e con ciò il grave nel perpendicolo, accelerandosi uniformemente, in istanti di tempo uguali non descriverebbe spazii diffuguali,ma descriverebbe spazii uguali,cioè 1,2,e 3;e con ciò andarebbe di moto equabile,ciò che è contro l'ipotesi.Così dunque i numerì non possono corrispondere alli quadrati in linea dupli, tripli dell'unità, intercetti fra 1, e 4.

Ma all' incontro, perchè il grave, che cade per il perpendicolo, si accelera uniformemente, ed acquista sempre maggior momento di gravità, quanto più s'avvicina al punto D, e con ciò descrive in istanti di tempo uguali spazii diffuguali, le differenze fra i quadrati considerati in numero, e quelli considerati in linea, si diminuiscono sempre, quanto più il grave s'avvicina al punto D; e diminuendosi sempre, quelle differenze, che vi sono fra i numeri, e le linee, svaniscono in tutto nel punto D, punto estremo del quadrato AD, quadrato in linea, ed in numero; e le differenze fra le radici in linea, ed in numero, ancora svaniscono in tutto nel punto V, ovvero nel punto E, punto estremo della radice DE2, quando le radici, ed i quadrati si considerano come infiniti. Ecco dunque dimostrato per l'ipotesi di Galileo, che i numeri non corrispondono alle radici,ed alli quadrati particolari in linea.

Ed in vero se li Signori Autori degl'atti avessero considerato la seconda proposizione del mio Metodo stampato

to l'anno 1718.avrebbero potuto vedere la differenza, che vi è fra i quadrati in numero, ed i quadrati in linea, perchè in quella hò dimostrato, che i quadrati infiniti in linea sono in proporzione aritmetica, perchè sono nel triangolo isoscile, e rettangolo; ed anche i quadrati 1,4,e 9,considerati sù l'asse, ed in numero non sono in proporzione aritmetica. Da tutto quello, che abbiam detto si conosce chiaramente, qual sia l'abbaglio, che prendono nelle due antecedenti obbjezioni, ed eccolo.

DY, ch'essi nominano ♈2 nella loro figura 39, non è radice in linea del quadrato AD, ch'essi Signori male a proposito,prendendolo come quadrato numero,lo chiamano quadrato 2, ciò che abbiamo dimostrato per l'ipotesi di Galileo, e per lo Metodo degl'indivisibili.

Da questo ancora si conosce la cagione, per la quale ritrovano nella loro Figura 40., che OP, che chiamano ♈2, cade sotto il punto D, e ciò perchè, come abbiamo dimostrato, i numeri non corrispondono giustamente alle radici in linea: ma poscia se considerano, che nell'infinito le differenze svaniscono, si ritrova, che DX, e non OP, è radice del quadrato AD linea. Dimostriamo ora la cagione degl'altri loro abbagli.

E' necessaria cosa considerare, che ne per lo mezzo de'calculi analitici, ne per lo mezzo de'calculi aritmetici si può mai trovar quello, ch'io dimostro nelle mie proposizioni, ciò che non avviene quando si dimostra per lo mezzo del Metodo dell'indivisibili di Cavalerio; e ciò perchè tanto i calculi analitici, come gl'aritmetici additano proposizioni particolari, le quali, può avvenire, che siano generali, ma non si può dimostrare per mezzo de'calculi se siano, o non siano generali. In vece che il Metodo degl'indivisibili, nel quale si considera l'infinito in numero, ci mostra sempre, se una proprietà è generale, o particolare, appunto come fa Euclide. Questo è un grave difetto nell'Algebra, ed ora lo mostreremo meglio, riflettendo sopra gl'abbagli, ch'essi han presi.

Li Signori Autori degl'atti all'opposizione IV. da

me

me riferita ,alla figura 38. tav. 6, ritrovano per la via di un calculo analitico, che NS è radice di AN, che è un quadrato minore dell'unità; ed indi concludono, che questa proposizione è generale, perchè, dicono essi, che lo stesso si può ritrovare in ogni punto.

Io all'incontro considerando l'infinito, hò dimostrato, che per quante radici particolari essi ritrovano per costruzione, la curva, che tirano per i punti estremi delle applicate prese per costruzione, non è mai il luogo generale delle infinite radici delle ascisse dell'asse, a cagion che nell' infinito svaniscono le differenze fra gl' eccessi, e le parallele, che terminano alle mie linee rette: Donde viene dunque questo abbaglio? Certamente non da altro, se non dal considerare una proposizione particolare, come generale, il quale abbaglio è solamente dal difetto del calculo analitico prodotto: E che ciò sia vero; per calculo analitico non possono mai provare, che le infinite radici terminino alla curva, onde non possono avere per lo mezzo de' calculi, che sono particolari, i luoghi generali delle cose, che cercano; ed in pruova di ciò, dimostrino essi per il calculo analitico il luogo generale delle infinite radici, dopò che io hò dimostrato, che per molte che se ne prendano per costruzione, non si può mai dire, che le altre applicate, che terminano alla curva, siano radici; ovvero dimostrino, che la mia Invenzione si poteva ritrovare per calculo analitico: Quello che troveranno sarà alcune radici particolari de' quadrati minori dell' unità, ed altre radici particolari ancora, per i punti estremi delle quali suppongono, male a proposito, descritta la curva; ma non mai proveranno per calculo, che la curva sia il loco generale delle radici: E in vero, quando poi si considerano le radici infinite per lo mezzo della mia costruzione, si ritrova, ch'il perimetro delle curve di qualunque genere, non puol mai essere una curva continuata, e questo si fa chiaro anche al senzo, quando si considerano le parabole di grado superiore: e che sia cosi, nella parabola piana gl'angoli curvilinei non sono

sen-

ſenſibili,perche gl'angoli,che fanno le mie linee rette non ſono angoli entranti; ma poſcia nella fig.5. del noſtro Metodo dell'anno 1715, la quale è la ſteſſa, che la 15 di queſto libro, l'angolo ACE è angolo entrante, e perciò la curva, che ha da paſſare per i punti A, C, E punti eſtremi de i cubi, come ſotteſa dalle due linee rette AC, CE, fa ſenſibilmente angolo curvilineo nel punto C; ciòche non avverrebbe, ſe là parabola Apolloniana ſi poteſſe deſcrivere come una curva continuata, perche quelle coſe, che ſon vere, ſi ritrovano vere ſino all'infinito, come appunto avviene de' miei Rettilinei.

E quì è degno da conſiderarſi, che giuſtamente, perchè nella parabola Apolloniana ſi ritrovano le radici de' quadrati minori dell'unità,i quali non ſi trovano nel mio Rettileneo parabolico piano, non ſi trovano poi nella parabola Apolloniana le vere radici in linea de' quadrati maggiori dell'unità, i quali ſi trovano ne'miei Rettilinei; e la cagione di ciò ſi è, che le radici de'quadrati minori dell'unità ſono radici numero preſe per coſtruzione, ed eſpreſſe in linea:ma poſcia,quando ſi vogliano continuare a conſiderare nella parabola Apolloniana tutte le radici, come radici numero, ſi ritrova in virtù della mia coſtruzione, che nell'infinito gl'eceſſi, perche ſuperflui, ſvaniſcono, e le radici in linee terminano alle mie linee rette.

E'degno ancora da conſiderarſi, che quello, che fa sì, che'l mio Rettilineo ſia la vera curva deſiderata dagli antichi, è appunto lo ſvanire, che fanno le differenze in ogni applicata di numero intero, perchè cominciando in ogni applicata di numero intero una nuova ſerie di differenze, neceſſariamente le linee, come ſono AC, CE, EG, GM, figura 41. tav. 7. fanno angolo in ogni applicata di numero intero, e formano la mia curva compoſta di linee rette determinate da punti determinati. Gl'abbagli dunque, che han preſi nelle loro oppoſizioni, da me riferite, conſiſtono dall'aver voluto conſiderare in numero i quadrati, e le radici intercette fra quelle di numero inte-

interò, e dal non avere intesa la natura della parabola Galilaica, e quella del Metodo dell'indivisibili.

Ecco dunque, mio riverito Signore, ed amico, ridotte a nulla le tante obbjezioni, che li Signori Autori degl'atti armati di calculi analitici, e di assertive magistrali, avean fatte contro di mè: Ma quì in vero potrei io ben dire, che se (come si deve sperare) li Signori Autori degl'atti studiaranno una volta la Geometria sintetica, ed il Metodo degl'indivisibili, e faranno riflessione alla mia ipotesi, ritroveranno vere le mie dimostrazioni; e lo direi con più ragione, che non l'han detto essi con quelle parole: *Uti sperandum est Autorem tandem aliquando valorem suarum demonstrationum agniturum, &c.* Ma io mi vergogno di usare pedanteschi modi di raggionare. Che dobbiamo dunque fare mio gentilissimo Signore? Voi, vedete, che io hò scritto più di quello, che in questa materia era bisogno per farla a tutti chiara; ed in pruova di ciò Voi vedete, che queste risposte, che hò fatte alli Signori Autori degl'atti, erano superflue, perchè tutte si ritrovano nella mia Raccolta; laonde le hò fatte solamente per additar le cagioni de'loro abbagli: sarebbe adunque superfluo il piu rispondere a veruno, e per ciò poniamo perpetuo silenzio a questa disputa, e diciamo con Virgilio.

Claudite jam pueri rivos, sat prata biberunt.

IL FINE.

Fig. II.
C
I
M
O
Q
S
V
Y
E
Fig. III.
X
A
B
C
F
G
H
V
T
N
I
L
M
P
c
Fig. V
L
K

Fig: VIII.
Q
Y
M
N
I
O
L
D
E
F
B
P
Fig: IX.
Q
C
E
A
E
C
S

Fig. XV.
F
E
Y
K
G
L
M
N
Z
P
Fig. XIII
T
G
R
A
Y
B
Z
X
F
E
C
N
O
P
C
f
i

Fig. XXVII.
A
B
C
D
S
Q
P
x
Q
I
Fig. XXVIII.

Fig. XXIX.
A
C
D
4
N
B
9
O
10
H
R
N
23
18
I
A
C
D
B
M
N
Fig XXX

Fig. XXXXIII.